МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

ЛЕКЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
що навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Теорія електричних кіл: Методи аналізу лінійних електричних кіл постійного струму. Лекції та приклади розвязування задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: М.Ю. Артеменко, Л.М. Батрак, В.В. Рогаль. – Електронні текстові данні (1 файл: 2,23 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 99 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 20.12.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету (протокол № 12/2018 від 26.11.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ
МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ.
ЛЕКЦІЇ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Артеменко Михайло Юхимович, проф., д-р техн. наук, проф.
Батрак Лариса Миколаївна, доц., канд. техн. наук
Рогаль Володимир Вікторович, доц., канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор *Ямненко Юлія Сергіївна, проф., д-р техн. наук, проф.*

Рецензент: *Шавьолкін Олександр Олексійович, проф., д-р техн. наук, проф.*

Представлені теоретичні відомості про основні методи розрахунку електричних кіл постійного струму. Класичні методи розрахунку – метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод еквівалентного генератора доповнені розрахунковими співвідношеннями, що відображають схемні функції електричного кола, залежності струму (напруги) вітки від параметру іншої вітки, а також випливають з принципів дуальності та симетрії. Кожен з представлених методів розрахунку супроводжується чітким алгоритмом застосування та ілюструється численними приклади розв’язування задач. Наведені завдання для самостійної роботи студентів та контрольні питання.

ЗМІСТ

Розділ 1. ХАРАКТЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ ТА ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ **5**

1.1. Елементи та вітки лінійних електричних кіл постійного струму **5**

1.2. Основні закони електричних кіл постійного струму. Закон Ома для вітки з резисторами та ЕРС (узагальнений закон Ома) **8**

1.3. Розрахунок електричних кіл постійного струму на основі еквівалентного перетворення їх ділянок **13**

Розділ 2. МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ **27**

2.1. Основне співвідношення методу контурних струмів для електричного кола постійного струму, що складається з *RE*-віток **27**

2.2. Врахування в рівняннях методу контурних струмів параметрів ідеальних джерел струму **33**

2.3. Алгоритм розрахунку електричного кола постійного струму за методом контурних струмів **36**

Розділ 3. МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ **40**

3.1. Основне співвідношення методу вузлових потенціалів для електричного кола постійного струму, що складається з *GJ* – віток **40**

3.2. Алгоритм розрахунку електричного кола постійного струму за методом вузлових потенціалів **47**

3.3. Метод двох вузлів **49**

Розділ 4. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТРУМУ ТА НАПРУГИ ОДНІЄЇ ВІТКИ **53**

4.1. Схемні функції електричного кола **53**

4.2. Метод еквівалентного генератора **61**

4.3. Передача максимальної енергії від активного двополюсника до навантаження **67**

4.4. Залежність струму (напруги) вітки від параметру іншої вітки **69**

Розділ 5. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ **71**

5.1. Принцип дуальності **71**

5.2. Принцип суперпозиції (накладання) **74**

5.3 Принцип взаємності (оборотності) **79**

5.4. Принцип симетрії **85**

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ **90**

ЛІТЕРАТУРА **92**

Додаток 1. МАТЕМАТИКА **94**

Розділ 1. ХАРАКТЕРНІ ОСОБЛИВОСТІ ТА ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

1.1. Елементи та вітки лінійних електричних кіл постійного струму

Електричні змінні в колах постійного струму є сталими в часі величинами, тому для позначення струму, напруги, ЕРС в колі постійного струму використовують великі літери латинського алфавіту. Крім того, з таких кіл видаляють реактивні елементи, оскільки одна з величин струму чи напруги цих елементів приймає нульове значення. Дійсно, за постійної величини струму котушки буде нульовою величина напруги на її затискачах, а за постійної величини напруги конденсатора буде нульовим струм, що протікає через нього. Саме тому котушки індуктивності видаляють з кіл постійного струму шляхом замикання точок електричного кола, між якими вони були ввімкнуті, оскільки тим самим реалізується нульове значення напруги між цими точками. Конденсатори ж видаляють з кіл постійного струму шляхом розриву, оскільки саме так реалізовується нульове значення струму між точками їх увімкнення. Таким чином, кола постійного містять лише елементи, представлені на рис. 1.1 а - в.

Ідеальне джерело постійної напруги (*або ЕРС*) – це активний елемент, напруга на затискачах якого не залежить від струму, що протікає через джерело, та чисельно дорівнює ЕРС цього джерела. Внаслідок такого визначення приріст струму джерела не викликає зміни напруги на ньому, тому внутрішній опір ідеального джерела напруги (ІДН) дорівнює нулю ($R_{BH} = 0$).

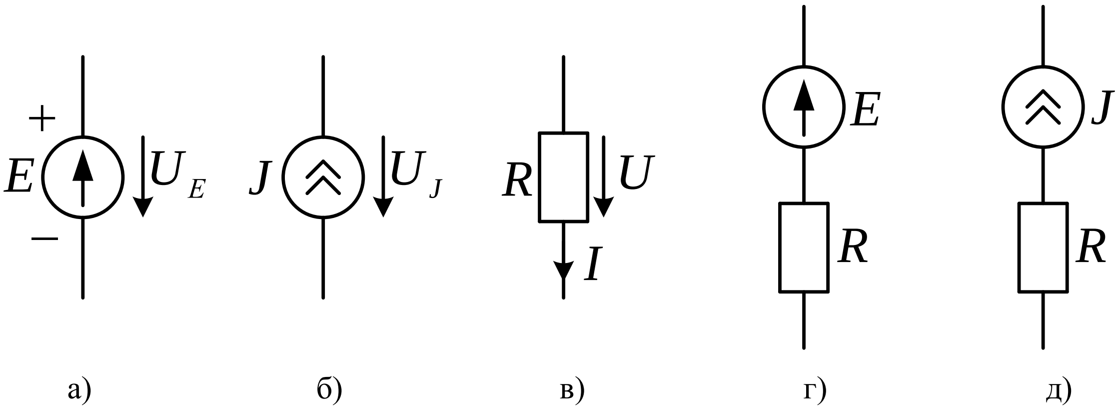


Рис. 1.1

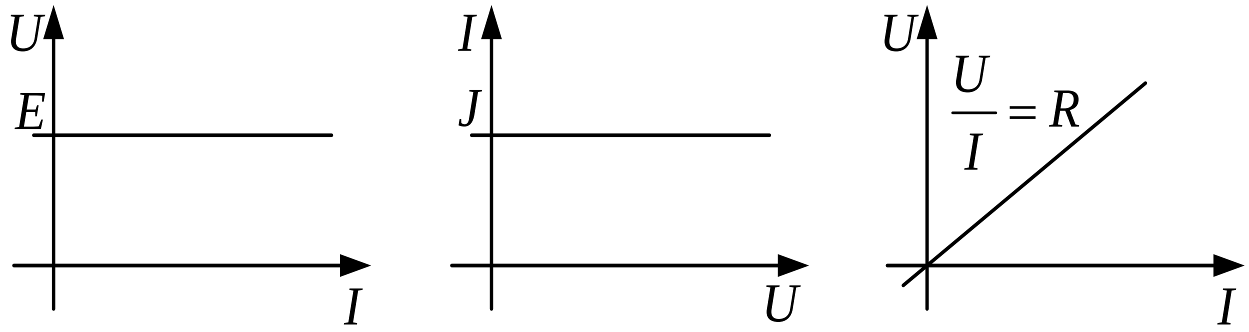
Струм всередині ІДН, тобто впорядкований рух позитивних зарядів від затискача з меншим потенціалом (показаний позначкою «мінус» на рис. 1.1.а) до затискача з більшим потенціалом (показаний позначкою «плюс») можливий лише за рахунок так званої *електрорушійної сили* (ЕРС), тобто дії сили неелектричної природи, напрям якої позначається стрілкою (рис. 1.1. а), яка завжди вказує на затискач ІДН з більшим потенціалом. Величина ЕРС, що позначається символом E, чисельно дорівнює роботі, що витрачається сторонніми силами на переміщення одиничного позитивного заряду всередині джерела, вимірюється у вольтах та задається як параметр ІДН при постановці задачі розрахунку електричного кола. Надлишки позитивних та негативних зарядів на затискачах ІДН з позначками «плюс» та «мінус» створюють електричне поле для зовнішнього кола, через яке замикається струм джерела. Робота сил цього електричного поля з переносу одиничного позитивного заряду в зовнішньому колі чисельно дорівнює напрузі U_E або різниці потенціалів на затискачах джерела. Із закону збереження енергії випливає, що $U_E = E$.

Ідеальне джерело постійного струму (умовне графічне позначення цього джерела зображено на рис. 1.1. б) - це такий активній елемент, струм якого не залежить від напруги на його затискачах. Внаслідок цього визначення внутрішній опір ідеального джерела струму (ІДС) нескінченно великий ($R_{BH} \to \infty$). Подвоєна стрілка вказує позитивний напрям струму джерела, величина якого J є параметром ІДС, що задається при розрахунку.

Зовнішнє електричне коло не впливає на струм ІДС, а визначає лише напругу U_J на затискачах джерела.

Резистор (умовне графічне позначення на рис. 1.1 в) - єдиний пасивний елемент кола постійного струму, параметром *R* якого є величина електричного опору.

Вольт-амперні характеристики (ВАХ) зазначених елементів представлені на рис. 1.2.



а) б) в)

Рис. 1.2

Для побудови ВАХ ідеального джерела напруги (рис. 1.2 а), що описується аналітичною залежністю

$$U_E = E \tag{1.1}$$

використана властивість незалежності напруги цього джерела, що дорівнює величині ЕРС *E*, від величини струму, що протікає через це джерело. Аналогічно, ВАХ ідеального джерела струму, що описується формулою

$$I_J = J \tag{1.2}$$

представлена на рис. 1.2 б та відображає незалежність величини струму, що протікає через це джерело та дорівнює параметру *J*, від величини напруги на затискачах цього джерела. Графік прямо пропорційної залежності напруги від струму резистора (рис. 1.2 в) є графічною ілюстрацією закону Ома, що може бути записаний у двох формах:

$$U_R = RI_R, \tag{1.3а}$$

або

$$I_R = GU_R, \tag{1.3б}$$

де $G = 1/R -$ провідність резистора, одиницею виміру якої є сіменс (1 См $= 1/$ Ом). За наявності декількох елементів одного типу вводять цифрові індекси їх ідентифікації.

Вітки електричного кола постійного струму складаються з елементів, представлених на рис. 1.1. а - в, або комбінацій цих елементів, увімкнених послідовно. Оскільки при послідовному з'єднанні комбінування ідеальних джерел напруги дає еквівалентне ІДН з сумарною ЕРС, сполучення ідеальних джерел різного типу не має практичного застосування, а послідовне з'єднання ідеальних джерел струму з різними параметрами неможливе, у подальшому обмежимося розглядом набору віток у вигляді комбінацій елементів, представлених на рис. 1.1. г та 1.1. д.

Усі вітки кіл постійного струму можна розподілити на дві множини за видом ВАХ. До множини *RE*-віток віднесемо такі, що допускають вираження напруги вітки через її струм, а до множини *GJ*-віток такі, що допускають вираження напруги вітки через її струм. Очевидно, множина *RE*-віток не може включати вітки, що містять ідеальні джерела струму, оскільки за визначенням цих джерел струм такої вітки дорівнюватиме параметру ІДС та не залежатиме від напруги вітки, а, отже, і напруги такої вітки не може бути виражена через її струм. До множини *GJ*-віток не можуть бути віднесені ідеальні джерела напруги, оскільки напруга такої вітки, що визначається ЕРС ІДН, не залежить від струму вітки, тому і струм вітки не може бути виражений через її напругу. Усі інші вітки постійного струму можуть бути віднесені до обох зазначених множин.

1.2. Основні закони електричних кіл постійного струму. Закон Ома для вітки з резисторами та ЕРС (узагальнений закон Ома)

Цей закон дозволяє визначити величину струму вітки за відомою напругою (або різницею потенціалів) на затискачах та параметрами усіх елементів вітки, що не включають ідеальні джерела струму. Для найпростіших віток даного типу (рис. 2.3), якщо спрямувати напругу U за напрямом струму *I*, знайти результуючу напругу резистора U_R як алгебраїчну суму зовнішньої напруги U та джерела й застосувати закон Ома в формі (1.3а), отримаємо співвідношення:

$$I = U_R / R = (U + E)/R; \qquad (1.4,\ a)$$

$$I = (U - E)/R\ . \qquad (1.4,\ б)$$

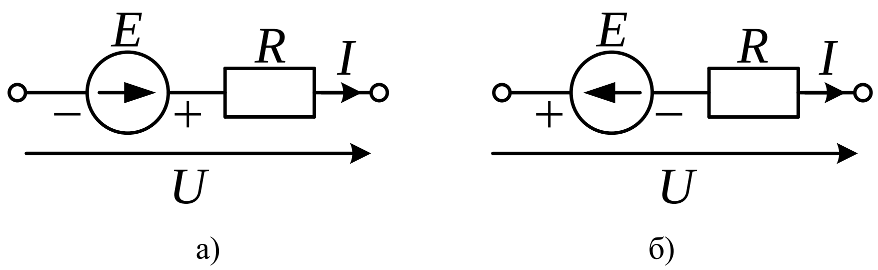


Рис. 1.3

Таким чином, якщо напрям ЕРС E збігається з позитивним напрямом струму I вітки, то у розрахункову формулу E входить зі знаком «плюс» (1.4*а*), у протилежному випадку (1.4 *б*) – зі знаком «мінус».

У загальному випадку струм вітки, що складається з зазначених елементів, визначається узагальненим законом Ома:

$$I = \frac{U + E_B}{R_B}, \qquad (1.5)$$

де U – напруга на затискачах вітки, напрям якої збігається з напрямом струму вітки; $E_B = \sum E_k$ – ЕРС вітки, що дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС джерел напруги, що входять до складу вітки, взятих зі знаком «плюс», якщо напрям ЕРС збігається з напрямом струму вітки, чи зі знаком «мінус» у протилежному випадку; $R_B = \sum R_m$ – опір вітки, що дорівнює арифметичній сумі опорів резисторів, що входять до складу вітки.

Приклад 1.1. *Знайти аналітичний вираз для струму вітки на рис. 1.4. в залежності від параметрів елементів.*

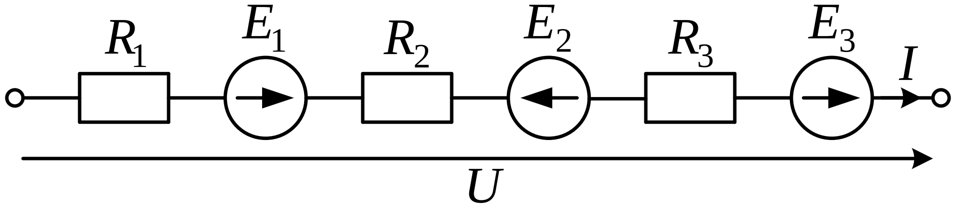


Рис. 1.4

У відповідності до формули (1.5) знаходимо струм вітки з урахуванням орієнтації ЕРС джерел відносно струму вітки наступним чином

$$I = \frac{U + E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Якщо в результаті розрахунків отримано від’ємне значення струму, то це означає, що дійсний напрям струму протилежний обраному.

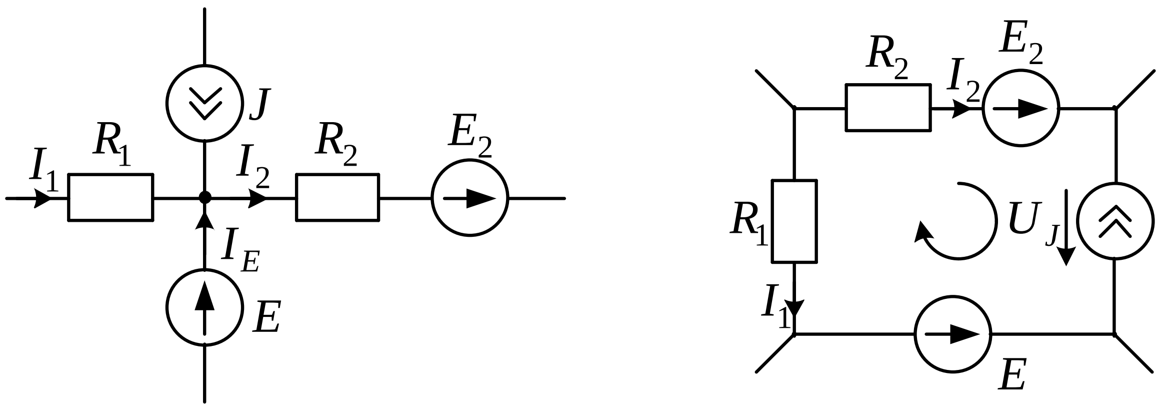
Для лінійних електричних кіл постійного струму закони Кірхгофа набувають наступних формулювань.

Перший закон Кірхгофа. *У вузлі електричного кола алгебраїчна сума струмів дорівнює нулю:*

$$\sum_{B} I_i = 0. \qquad (1.6)$$

Для застосування цього закону мають бути напрямлені струми. Струм, що входить до алгебраїчної суми з виразу (1.6), вважається додатним, якщо він втікає у вузол, і від’ємним, якщо витікає з вузла. Наприклад, для вузла електричного кола на рис. 1.5а перший закон Кірхгофа набуває форми:

$$I_1 - I_2 + J + I_E = 0.$$



а) б)

Рис. 1.5

За першим законом Кірхгофа складають рівняння для струмів незалежних вузлів (тоді в цих рівняннях немає струмів ідеальних джерел напруги), а також знаходять струми ІДН за відомими струмами віток. Так для кола на рис. 1.5а

$$I_E = -I_1 + I_2 - J.$$

Другий закон Кірхгофа. *В контурі електричного кола алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі напруг елементів*.

$$\sum_K E_i = \sum_K U_j. \tag{1.7}$$

Для практичного застосування другого закону Кірхгофа спрямовують напруги елементів (для резисторів за обраними напрямками струму) та вводять напрям обходу контуру (як правило, за годинниковою стрілкою). Тоді кожна ЕРС, що входить у ліву частину закону, записується зі знаком «плюс», якщо стрілка ЕРС співпадає з напрямом обходу контуру, в протилежному випадку - зі знаком «мінус». Кожна з напруг у правій частині закону записується зі знаком «плюс», якщо її напрям збігається з напрямом обходу контуру, та зі знаком «мінус» в протилежному випадку. Наприклад, для контуру електричного кола на рис. 1.5 б

$$E_2 - E_1 = -U_1 + U_J + U_2.$$

З цього рівняння за відомими ЕРС та напругами елементів можна знайти напругу джерела струму:

$$U_J = E_2 - E_1 + U_1 - U_2.$$

Також за другим законом Кірхгофа складають рівняння для напруг незалежних контурів, тоді в них не входять напруги ідеальних джерел струму, а напруги резисторів виражають через струми та опори за законом Ома:

$$\sum_K E_i = \sum_K I_j R_j \tag{1.8}$$

Знак кожного доданку у правій частині формули (1.8) визначається орієнтацією струмів резисторів відносно напряму обходу контуру аналогічно правилу для напруг формули (1.7).

Баланс потужностей в електричних колах не є окремим законом, оскільки є наслідком застосування першого та другого законів Кірхгофа для усіх елементів електричного кола. При проходженні струмів через резистори вони розсіюють теплову енергію. Відповідно до закону збереження енергії кількість теплоти, що виділяється за одиницю часу в усіх резисторах кола, має дорівнювати енергії, яка генерується за той самий час усіма джерелами кола.

Якщо напрям струму ідеального джерела напруги I_E збігається з напрямом ЕРС E, то відповідно до визначення ЕРС, це джерело віддає у коло енергію за одиницю часу, тобто потужність $P_E = EI_E$. Якщо напрями струму та ЕРС протилежні, але напрями струму та напруги збігаються, то джерело споживає енергію (наприклад, при заряді акумулятора), і тоді добуток EI_E входить до рівняння енергетичного балансу зі знаком «-». Таким чином, *протилежність напрямів напруги й струму джерел є ознакою генерації електричної енергії, збіжність зазначених напрямів – ознака споживання електричної енергії*.

Аналогічно, потужність джерела струму P_J визначається добутком напруги U_J на його затискачах та параметра струму джерела J: $P_J = JU_J$, причому знак цього добутку визначається за сформульованим правилом.

Нарешті, потужність резистора з урахуванням закону Ома визначається виразом

$$P_R = U_R I_R = \left(I_R R\right) I_R = I_R^2 R,$$

що набуває тільки невід’ємних значень внаслідок збіжності напрямів струму й напруги резистора.

Таким чином, загальний вигляд рівняння балансу потужностей в колі постійного струму:

$$\sum_e EI_E + \sum_j JU_J = \sum_r I^2 R. \tag{1.9}$$

Алгебраїчна сума потужностей усіх джерел кола $P_{ДЖ} = \sum_e EI_E + \sum_j JU_J$ ***дорівнює арифметичній сумі потужностей усіх резисторів (споживачів)*** $P_{СП} = \sum_r I^2 R.$

Баланс потужностей використовують для оцінки вірності та точності проведених розрахунків (вимірювань). Похибка балансу визначається за формулою:

$$\delta_p = \frac{\left|P_{ДЖ} - P_{СП}\right|}{(P_{ДЖ} + P_{СП})/2} \cdot 100\% . \tag{1.10}$$

Задовільна точність не перевищує одного відсотку.

1.3. Розрахунок електричних кіл постійного струму на основі еквівалентного перетворення їх ділянок

Розрахунок та дослідження процесів у складних електричних колах можна спростити шляхом перетворення первісно заданої схеми до еквівалентної, яка містить меншу кількість віток, контурів чи вузлів, а, отже, і меншу кількість рівнянь, що визначають її електричний стан. Перетворення ділянки кола називається еквівалентним, якщо струми і напруги частини кола, що не перетворювалося, залишаються без змін.

ВАХ реального джерела та його схемні еквіваленти. Еквівалентне перетворення джерел

Струм у пасивному електричному колі, що приєднане до ідеального джерела напруги, залежить від параметрів цього кола та ЕРС джерела E. У випадку короткого замикання затискачів такого джерела його струм буде необмежено зростати, оскільки внутрішній опір нульовий. Таке джерело є джерелом нескінченної потужності, яке фізично не можливо реалізувати. У дійсності при замиканні контактів реального джерела енергії струм може мати тільки обмежене значення, тому що ЕРС джерела врівноважується спадом напруги на відмінному від нуля внутрішньому опорі джерела. Аналогічно, при нескінченному зростанні опору зовнішнього кола, приєднаного до ідеального джерела струму, напруга на його затискачах, а в наслідок цього і потужність нескінченно зростають. Тому ідеальне джерело струму також фізично реалізувати не можливо. Однак ідеальні джерела напруги й струму є зручними моделями генераторів електричної енергії, до яких наближаються фізично реалізовані пристрої в певних режимах роботи, тому на основі ідеальних джерел будуються схеми заміщення реальних генераторів.

Типова ВАХ реального джерела зображена на рис. 1.6 а. Вольт-амперні характеристики ідеальних джерел напруги та струму є прямими, паралельними осям U та I (показані пунктиром на рис. 1.6 а). При невеликих струмах навантаження в діапазоні від 0 до I_1 напруга на затискачах цього джерела спадає в залежності від струму за лінійним законом:

$$U = E - IR_{BH} . \tag{1.11}$$

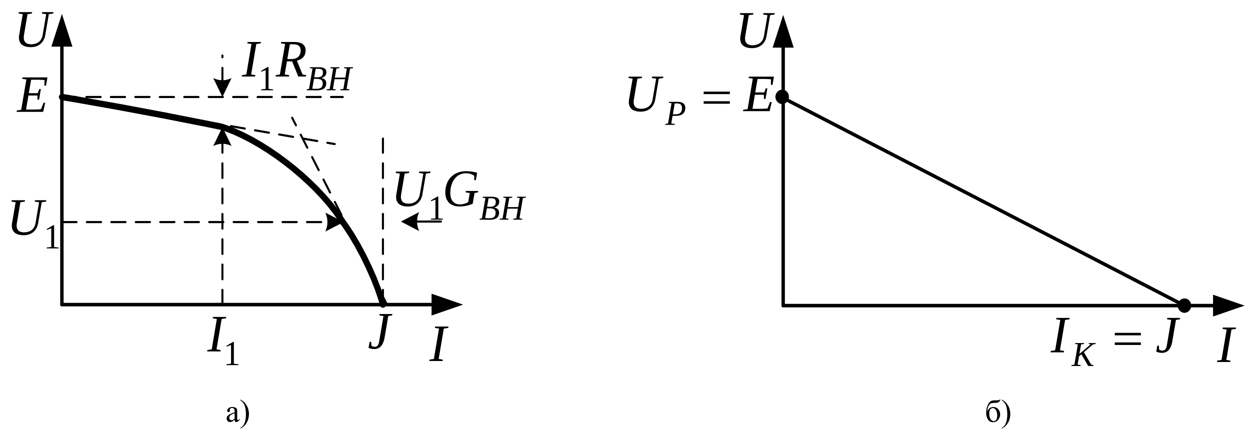


Рис. 1.6

Таку залежність напруги від струму джерела реалізовує схемний еквівалент Тевеніна (рис. 1.7 а). При подальшому зростанні струму вольт-амперна характеристика реального джерела стає нелінійною, але в області малих напруг (в діапазоні від 0 до U_1) знову може бути апроксимована іншою лінійною залежністю

$$I = J - UG_{BH} . \tag{1.12}$$

Таку залежність струму від напруги джерела реалізовує схемний еквівалент Нортона (рис. 1.7б). Параметри залежностей (1.11), (1.12) визначаються кусково лінійною апроксимацією нелінійної ВАХ на рис. 1.6а і в загальному випадку не є взаємозалежними, зокрема, $G_{BH} \neq 1/R_{BH}$.

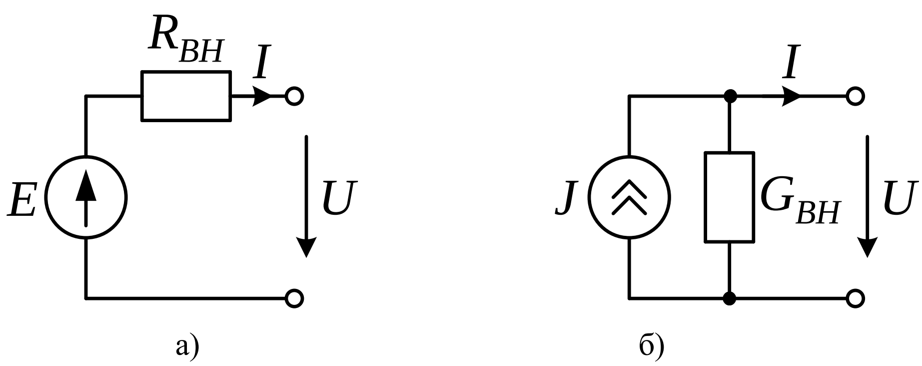


Рис. 1.7

Розв'язання деяких задач спрощується при еквівалентному перетворенні реальних джерел або віток, представлених за схемами Тевеніна та Нортона. У цьому випадку вони реалізовують єдину лінійну ВАХ, представлену на рис. 1.6б, яка може бути аналітично описана залежностями, аналогічними (1.19), (1.20). Після вираження напруги через струм з рівняння (1.12) та підстановки в (1.11) матимемо пару еквівалентних залежностей

$$U = E - IR = J/G - I/G,$$

з яких випливають умови рівності параметрів для

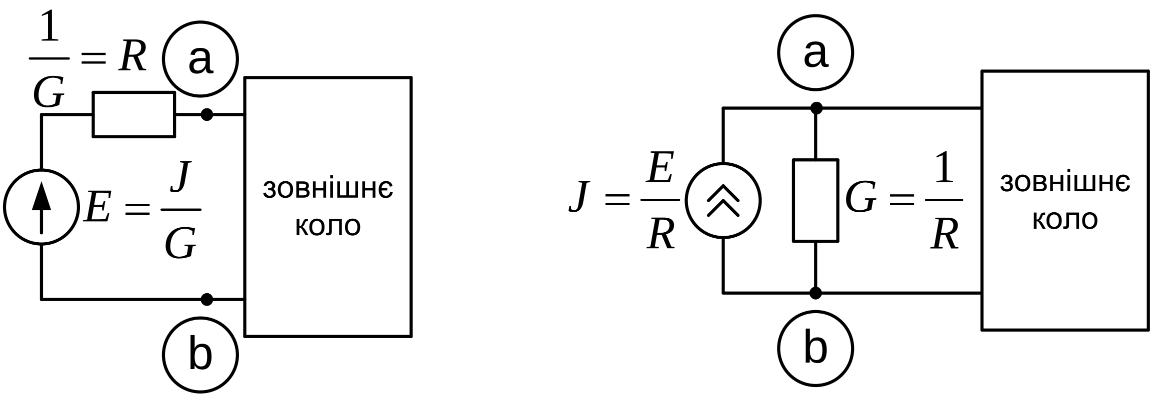
а) еквівалентного перетворення неідеального джерела напруги (рис. 1.8а) на неідеальне джерело струму (рис. 1.8б):

$$J = E/R, \quad G = 1/R; \quad . \tag{1.13}$$

б) еквівалентного перетворення неідеального джерела струму (рис. 1.8б) на неідеальне джерело напруги (рис. 1.8а):

$$E = JR, \quad R = 1/G. \quad . \tag{1.14}$$

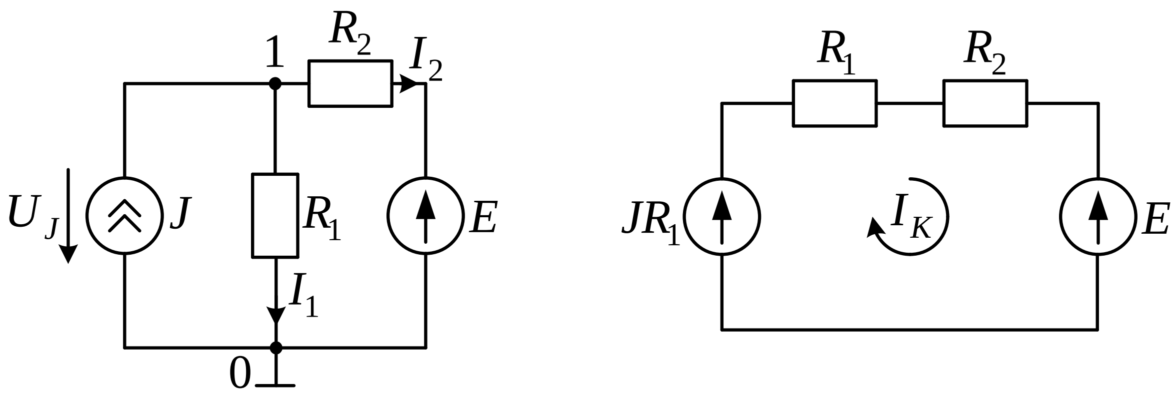
Таким чином, *послідовне з'єднання джерела напруги, що має ЕРС Е, з опором R еквівалентне паралельному з'єднанню того самого опору з джерелом струму, що має параметр* $J = E/R$, *а паралельне з'єднання джерела струму, що має параметр* J, *з опором R еквівалентне послідовному з'єднанню того самого опору з джерелом напруги, що має параметр* $E = JR$.



а) б)

Рис. 1.8

Приклад 1.2. *Визначити струми усіх резисторів схеми на рис. 1.9а, застосувавши еквівалентне перетворення джерел. Перевірити вірність розрахунку балансом потужностей*



а) б)

Рис. 1.9

Здійснивши перетворення паралельного з’єднання джерела струму J , з опором R_1 на послідовному з’єднанню того самого опору з джерелом напруги, що має параметр JR_1, матимемо одноконтурну еквівалентну схему на рис. 1.9б. Контурний струм, що збігається зі струмом другого резистора, може бути знайдений з використанням другого закону Кірхгофа:

$$JR_1 - E = I_K(R_1 + R_2),$$

звідки

$$I_2 = I_K = \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2} = \frac{10 \times 3 - 15}{3 + 2} = 3A.$$

Струм першого резистора знайдемо з первісної схеми, застосувавши перший закон Кірхгофа:

$$I_1 = J - I_2 = 10 - 3 = 7A.$$

Для зведення балансу потужності потрібно визначити напругу джерела струму:

$$U_J = I_1 R_1 = 7 \times 3 = 21B.$$

Струм I_2 протікає проти напряму ЕРС джерела, тому в балансі потужностей потужність джерела напруги буде враховуватись зі знаком мінус:

$$JU_J - EI_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2.$$

Після підстановки числових значень матимемо:

$$P_{ДЖ} = JU_J - EI_2 = 10 \times 21 - 15 \times 3 = 165(Вт).$$

$$P_{СП} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 7^2 \times 3 + 3^2 \times 2 = 165(Вт).$$

Виконання балансу потужностей підтверджує вірність розрахунку.

Еквівалентне перетворення послідовного та паралельного з’єднань опорів

Одним з розповсюджених видів еквівалентного перетворювання є перетворення резистивних схем з послідовним чи паралельним з’єднанням елементів. Нагадаємо, що з’єднання елементів називається *послідовним*, якщо воно не містить вузлів, тобто є однією віткою, в якій струми усіх елементів є однаковими. Через усі послідовно з’єднані резистори кола на рис. 1.10а протікає струм I. За другим законом Кірхгофа вхідна напруга врівноважується сумою напруг елементів, кожна з яких може бути виражена через струм та опір за законом Ома:

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = R_1 I + R_2 I + \cdots + R_n I = \left(R_1 + R_2 + \cdots + R_n\right) I = R_{EKB} I,$$

де U_i − напруга на *i*-тому опорі;

$$R_{EKB} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i - \qquad (1.15)$$

еквівалентний опір послідовного з‘єднання *n* резисторів.

Таким чином, *послідовне з‘єднання резисторів можна замінити одним еквівалентним, опір якого дорівнює сумі опорів зазначених резисторів. При послідовному з‘єднанні однакових резисторів еквівалентний опір дорівнює опору кожного з резисторів, помноженому на їх кількість.*

Частка вхідної напруги, що падає на *i*-му резисторі при послідовному з‘єднанні

$$\frac{U_i}{U} = \frac{IR_i}{U} = \frac{R_i}{\sum_{i=1}^{n} R_i}. \qquad (1.16)$$

З’єднання елементів називається *паралельним*, якщо напруга, прикладена до всіх елементів з’єднання, однакова (усі елементи з’єднання ввімкнені між двома однаковими вузлами). Схема паралельного з’єднання резисторів наведена на рис. 1.10б. З урахуванням однакової напруги елементів, першого закону Кірхгофа та закону Ома

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n} = U(G_1 + G_2 + \cdots + G_n) = UG_{EKB},$$

де $G_i = \dfrac{1}{R_i}$ – провідності відповідних опорів;

$$G_{EKB} = 1/R_{EKB} = \sum_{i=1}^{n} G_i = \sum_{i=1}^{n} 1/R_i - \tag{1.17}$$

еквівалентна провідність паралельного з‘єднання n резисторів.

Отже, *паралельне з‘єднання резисторів можна замінити одним еквівалентним, провідність якого дорівнює сумі провідностей зазначених резисторів. При паралельному з‘єднанні однакових резисторів еквівалентний опір дорівнює опору кожного з резисторів, діленому на їх кількість.*

Частка вхідного струму, що протікає через i-ий резистор при паралельному з‘єднанні

$$\frac{I_i}{I} = \frac{G_i}{G_{EKB}} = \frac{G_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i} = \frac{R_{EKB}}{R_i}. \tag{1.18}$$

У окремому випадку $n = 2$ з виразу (1.17) випливає формула для еквівалентного опору двох паралельно з‘єднаних резисторів (рис. 1.10в)

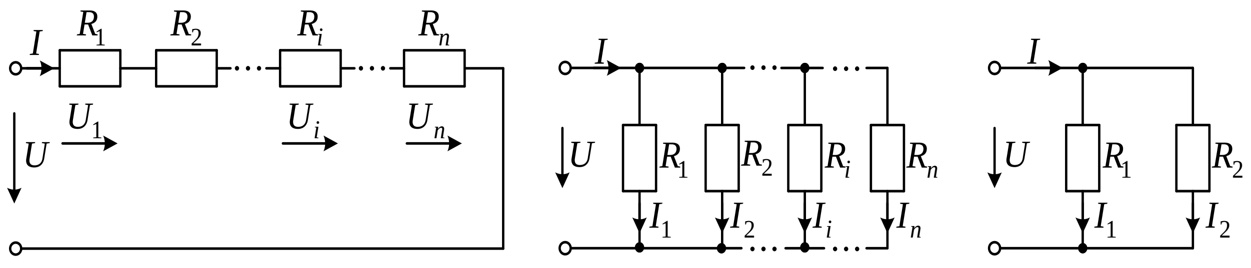
$$R_{EKB} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{1.19}$$

а з виразів (1.18) та (1.19) формула так званого правила чужого опору:

$$I_1 = I\frac{R_{EKB}}{R_1} = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{1.20}$$

Таким чином, *еквівалентний опір паралельного з‘єднання двох резисторів дорівнює добутку опорів цих резисторів, діленому на їх суму, а струм кожного з резисторів є часткою їх спільного струму, що визначається відношенням опору іншого (чужого) резистора до суми опорів цих резисторів.* За правилом чужого опору струм другого резистора кола на рис. 1.10 в визначається виразом

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

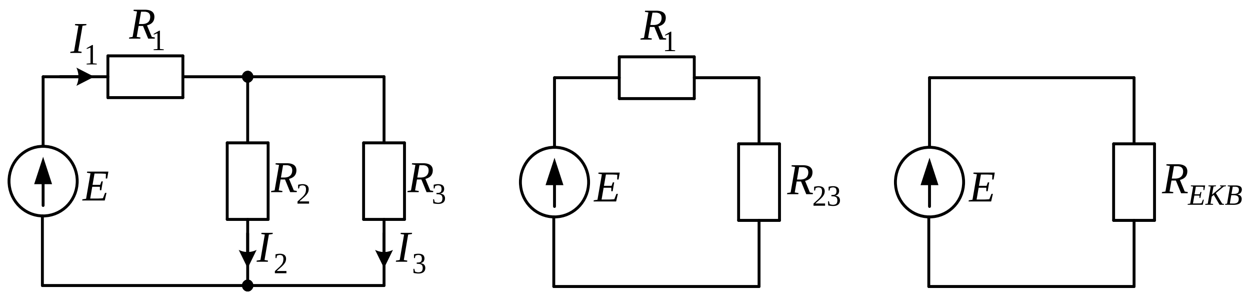


а) б) в)

Рис. 1.10

Метод розрахунку електричного кола з одним джерелом та змішаним (послідовно-паралельним) з’єднанням резисторів складається з таких етапів. На першому етапі (згортки схеми) шляхом еквівалентного перетворення ділянок електричного кола з паралельним та/чи послідовним з’єднання резисторів з використанням формул (1.15), (1.17) для параметрів еквівалентних опорів досліджувану схему зводять до найпростішої, що містить єдине джерело та вхідний еквівалентний опір. На другому етапі визначають вхідний струм, застосувавши закон Ома у випадку джерела вхідної напруги, або прирівнявши його до параметру джерела вхідного струму. На третьому етапі (розгортки схеми), застосовуючи формули (1.16), (1.18) для знаходження часток вже відомих напруг та струмів перетворених ділянок, визначають струми усіх віток первісної схеми. На останньому етапі перевіряють вірність розрахунку балансом потужностей.

Приклад 1.3. *Визначити струми усіх віток кола на рис. 1.11а, якщо* $E=11В; R_1=1Ом; R_1=2Ом; R_1=1Ом.$ *Перевірити вірність розрахунку зведенням балансу потужностей.*



а) б) в)

Рис. 1.11

1. В заданій схемі помічаємо ділянку паралельного з'єднання резисторів R_2, R_3 та замінюємо її одним еквівалентним резистором R_{23}, (рис. 1.11б), номінал якого розраховуємо за формулою (1.19):

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 3}{2+3} = 1.2(Ом).$$

В утвореній схемі помічаємо ділянку послідовного з'єднання резисторів R_1, R_{23} та замінюємо її одним еквівалентним резистором $R_{ЕКВ}$ (рис. 1.11в), номінал якого розраховуємо за формулою (1.15):

$$R_{ЕКВ} = R_1 + R_{23} = 1 + 1.2 = 2.2(Ом).$$

2. Вхідний струм джерела напруги розраховуємо за законом Ома:

$$I_E = \frac{E}{R_E} = \frac{11}{2,2} = 5(A).$$

3. На етапі розгортки визначаємо струми віток, застосувавши правило чужого опору та перший закон Кірхгофа:

$$I_1 = I_E = I_{23} = 5A;$$
$$I_2 = I_{23}\frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5 \cdot \frac{3}{2+3} = 3(A);$$
$$I_3 = I_{23} - I_2 = 5 - 3 = 2(A).$$

4. Складаємо баланс потужностей у символьному вигляді, врахувавши, що досліджувана схема містить одне джерело напруги та три резистора:

$$EI_1 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3.$$

Підстановка числових даних дає значення потужностей:

$$P_{ДЖ} = EI_1 = 11 \times 5 = 55(Вт).$$

$$P_{СП} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 5^2 \times 1 + 3^2 \times 2 + 2^2 \times 3 = 25 + 18 + 12 = 55(Вт).$$

Баланс зійшовся, розрахунок вірний.

Еквівалентне перетворення трикутника резисторів на зірку та навпаки

Якщо структура електричного кола не містить ділянок послідовного чи паралельного з'єднання резисторів, спростити розрахунок можуть еквівалентні перетворення, що видаляють контур чи вузол складного кола. Мінімальна кількість резисторів, що утворює вузол, дорівнює трьом. На рис.

1.12а представлена схема їх з'єднання, топологія якого нагадує трипроменеву зірку. Множина параметрів цієї ділянки кола складається з трьох опорів резисторів R_a, R_b, R_c, індекси яких встановлені відповідно до позначень вузлів, до яких вони приєднані. Еквівалентне коло з трьох резисторів інших номіналів R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} конфігурації трикутника, що видаляє внутрішній вузол зірки *d*, представлене на рис. 1.12б. Під еквівалентністю трикутника та зірки резисторів розуміється незмінність струмів та напруг зовнішнього кола, тобто під дією однакових зовнішніх струмів I_a, I_b, I_c мають встановлюватися однакові напруги між зовнішніми затискачами *a*, *b*, *c* перетворюваних кіл. Оскільки величини вказаних зовнішніх струмів зв'язані між собою за першим законом Кірхгофа, задати їх можна двома ідеальними джерелами струму, одна з можливих схем увімкнення яких реалізована на рис. 1.12 а, б.

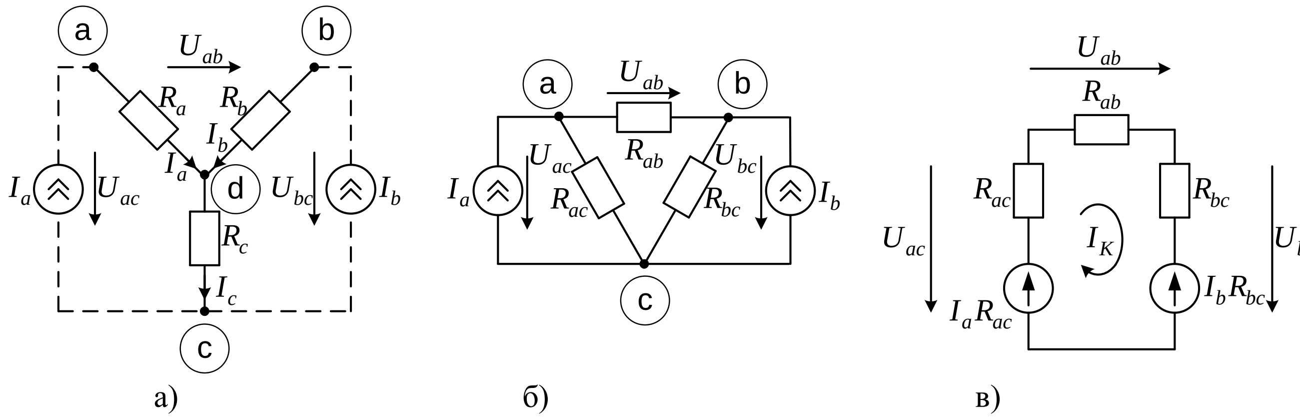


Рис. 1.12

Будемо вважати первісно заданою схемну конфігурацію трикутника резисторів (рис. 1.12б) з відомими параметрами. Потрібно розрахувати параметри резисторів еквівалентної зірки резисторів (рис. 1.12а), що видаляє контур з первісної схеми, але створює додатковий вузол. Для знаходження зовнішніх напруг первісної схеми трикутника опорів перетворимо паралельні з'єднання ідеальних джерел струмів та резисторів на послідовні схеми цих самих резисторів та ідеальних джерел напруги з зазначеними на рис. 1.12в параметрами ЕРС. Контурний струм утвореної схеми знайдемо, розділивши контурну ЕРС на суму опорів резисторів:

$$I_K = \frac{R_{ac}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}}.$$

Зовнішні напруги первісної схеми трикутника знайдемо за узагальненим законом Ома для перетвореної схеми (рис. 1.12 в):

$$U_{ac} = I_a R_{ac} - I_K R_{ac} = R_{ac}\left(I_a - \frac{R_{ac}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}} \right) =$$

$$= \frac{R_{ac}(I_a R_{ac} + I_a R_{ab} + I_a R_{bc} - R_{ac}I_a + R_{bc}I_b)}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}} = \frac{R_{ac}[I_a(R_{ab} + R_{bc}) + I_b R_{bc}]}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}};$$

$$U_{ab} = I_K R_{ab} = \frac{R_{ab}(R_{ac}I_a - R_{bc}I_b)}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}};$$

$$U_{bc} = I_b R_{bc} + I_K R_{bc} = R_{bc}\left(I_b + \frac{R_{ac}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}} \right) =$$

$$= \frac{R_{bc}(I_b R_{ac} + I_b R_{ab} + I_b R_{bc} + R_{ac}I_a - R_{bc}I_b)}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}} = \frac{R_{bc}[I_b(R_{ab} + R_{bc}) + I_a R_{ac}]}{R_{ac} + R_{ab} + R_{bc}}.$$

Зовнішні напруги перетвореної схеми зірки (рис. 1.12 а) знайдемо із застосуванням законів Кірхгофа:

$$U_{ac} = I_a R_a + (I_a + I_b)R_c = I_a(R_a + R_c) + I_b R_c;$$
$$U_{bc} = I_a R_a - I_b R_b;$$
$$U_{bc} = I_b R_b + (I_a + I_b)R_c = I_b(R_b + R_c) + I_a R_c.$$

Із порівняння коефіцієнтів при однакових струмах у двох останніх виразах встановлюємо формули розрахунку опорів резисторів зірки через опори резисторів трикутника:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \qquad (1.21)$$
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Таким чином, *при перетворенні схеми з'єднання резисторів у вигляді трикутника резисторів на еквівалентну схему у вигляді трипроменевої зірки опір резистора променя зірки дорівнює добутку опорів резисторів прилеглих сторін трикутника, діленому на суму опорів резисторів трикутника.*

Якщо первісно заданою є схемна конфігурацію зірки резисторів з відомими параметрами, то в результаті її перетворення на еквівалентний трикутник резисторів видаляється внутрішній вузол зірки, але утворюється додатковий контур з резисторів трикутника. Для встановлення параметрів резисторів трикутника система рівнянь (1.21) має бути розв’язана відносно величин R_{12}, R_{23}, R_{31}. Для цього прямою підстановкою та еквівалентними алгебраїчними перетвореннями знаходимо значення виразу

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 = \frac{R_{12}R_{31}R_{12}R_{23} + R_{12}R_{23}R_{31}R_{23} + R_{12}R_{31}R_{31}R_{23}}{(R_{12} + R_{23} + R_{31})^2} =$$

$$= \frac{R_{12}R_{23}R_{13}(R_{12} + R_{23} + R_{13})}{(R_{12} + R_{23} + R_{13})^2} = \frac{R_{12}R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

З урахуванням формул (1.21) виразу в правій частині останньої рівності можна надати набором наступних значень:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3 = \frac{R_{12}R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} = R_1R_{23} = R_2R_{13} = R_3R_{12}.$$

Звідси шукані величини опорів резисторів, з’єднаних трикутником:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}{R_3} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3};$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}; \qquad (1.22)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}.$$

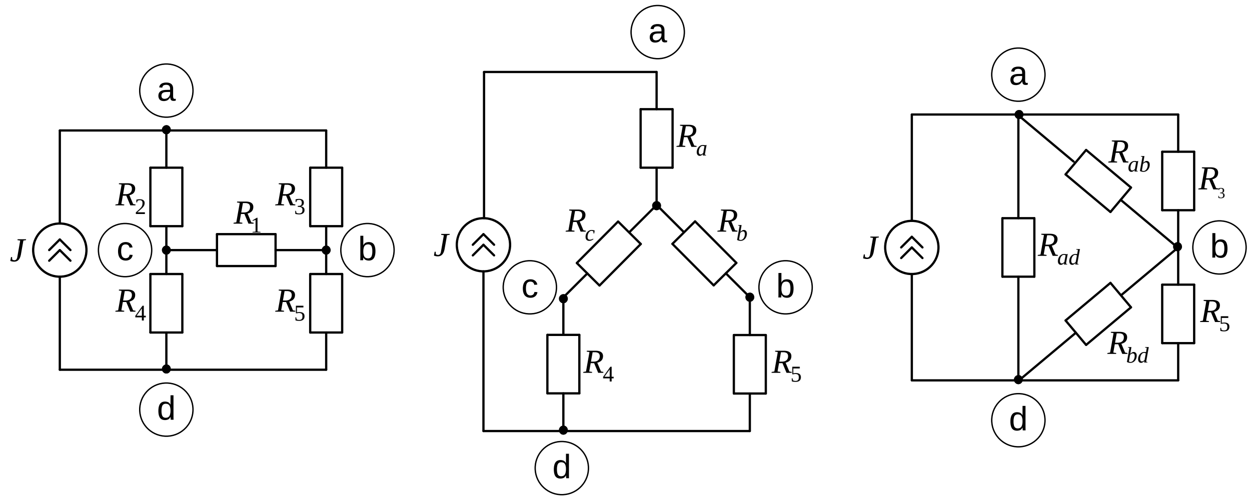
У усіх лівих частинах формул (1.22) маємо опори резисторів, що складають сторони схеми трикутника, в правих частинах цих виразів маємо суми опорів резисторів променів зірки, прилеглих до відповідної сторони трикутника, до яких додається добуток цих самих опорів, ділений на опір резистора, розташованого на місці третього променя зірки. Таким чином, *при перетворенні схеми з’єднання резисторів у вигляді трипроменевої зірки на еквівалентну схему у вигляді трикутника резисторів опір резистора сторони трикутника дорівнює сумі опорів резисторів прилеглих променів зірки та їх добутку, діленому на опір резистора третього променя зірки.*

Знайдемо вирази для провідностей резисторів при перетворенні зірка-трикутник:

$$G_{12}=\frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{R_1+R_2+\dfrac{R_1R_2}{R_3}}=\frac{1}{\dfrac{1}{G_1}+\dfrac{1}{G_2}+\dfrac{G_3}{G_1G_2}}=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3};$$

$$G_{23}=\frac{G_2G_3}{G_1+G_2+G_3};G_{31}=\frac{G_3G_1}{G_1+G_2+G_3}. \qquad (2.23)$$

Приклад 1.4 *Визначити струми усіх віток кола на рис. 1.13 а, параметри елементів якого* $J=10A;\ R_1=6Ом;\ R_2=12Ом;\ R_3=18Ом;\ R_4=4Ом;\ R_5=1Ом,$ *двома способами, застосувавши перетворення трикутник опорів - зірка та навпаки.*



а) б) в)

Рис. 1.13

В першому способі розв’язання задачі замінюємо трикутник опорів R_1, R_2, R_3 на зірку (рис. 1.13 б) з номіналами

$$R_a=\frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}=\frac{12\times18}{6+12+18}=6Ом;$$

$$R_b=\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}=\frac{6\times18}{6+12+18}=3Ом;$$

$$R_c=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}=\frac{6\times12}{6+12+18}=2Ом.$$

Знаходимо еквівалентні опори ділянок з послідовним з’єднанням резисторів

$$R_{c4} = R_c + R_4 = 2 + 4 = 6 Ом$$
$$R_{b5} = R_b + R_5 = 3 + 1 = 4 Ом.$$

Оскільки резистор R_a та ідеальне джерело струму J з'єднані послідовно, $I_a = J = 10A.$ За правилом чужого опору знаходимо струми не перетворюваних віток:

$$I_4 = J\frac{R_{b5}}{R_{c4} + R_{b5}} = 10\frac{4}{6+4} = 4A;$$
$$I_5 = J - I_4 = 10 - 4 = 6A.$$

Для знаходження струмів перетворюваних віток маємо знайти зовнішні напруги:

$$U_{ab} = I_a R_a + I_5 R_b = 10 \times 6 + 6 \times 3 = 78B;$$
$$U_{ac} = I_a R_a + I_4 R_c = 10 \times 6 + 4 \times 2 = 68B;$$
$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = 78 - 68 = 10B.$$

За законом Ома визначаємо струми

$$I_2 = \frac{U_{ac}}{R_2} = \frac{68}{12} = 5\frac{2}{3}A;$$
$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{78}{18} = 4\frac{1}{3}A;$$
$$I_1 = \frac{U_{cb}}{R_1} = \frac{10}{6} = 1\frac{2}{3}A.$$

У другому способі розв'язання задачі замінюємо опорів зірку R_1, R_2, R_4 на трикутник (рис. 1.13в) з номіналами

$$R_{ad} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_1} = 12 + 4 + \frac{12 \times 4}{6} = 24 Ом;$$
$$R_{ab} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_4} = 6 + 12 + \frac{12 \times 6}{4} = 36 Ом;$$
$$R_{bd} = R_1 + R_4 + \frac{R_1 R_4}{R_2} = 6 + 4 + \frac{6 \times 4}{12} = 12 Ом.$$

Знаходимо еквівалентний опір послідовно-паралельного з'єднання резисторів R_{ab}, R_3, R_{bd}, R_5:

$$R_{abd} = \frac{R_{ab} R_3}{R_{ab} + R_3} + \frac{R_{bd} R_5}{R_{bd} + R_5} = \frac{36 \times 18}{36 + 18} + \frac{12 \times 1}{12 + 1} = 12\frac{12}{13} Ом.$$

Визначаємо сумарні струми за правилом чужого опору:

$$I_{ab} + I_3 = I_{bd} + I_5 = J\,\frac{R_{ad}}{R_{abd} + R_{ad}} = 10 \times \frac{24}{12\frac{12}{13} + 24} = \frac{13}{2}\,A.$$

За цим же правилом визначаємо струми віток

$$I_3 = (I_{ab} + I_3) \times \frac{R_{ab}}{R_{ab} + R_3} = \frac{13}{2} \times \frac{36}{36 + 18} = 4\frac{1}{3}\,A;$$

$$I_5 = (I_{bd} + I_5) \times \frac{R_{bd}}{R_{bd} + R_5} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{12 + 1} = 6A.$$

Інші струми віток визначаються із застосуванням першого закону Кірхгофа:

$$I_2 = J - I_3 = 10 - \frac{13}{3} = 5\frac{2}{3}\,A;$$

$$I_4 = J - I_5 = 10 - 6 = 4A;$$

$$I_1 = I_2 - I_4 = \frac{17}{3} - 4 = 1\frac{2}{3}\,A.$$

Повна збіжність значень струмів віток, розрахованих двома способами, свідчить про коректність проведених викладок.

Розділ 2. МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ

Основна ідея методу контурних струмів (МКС) полягає у припущенні, що в межах кожного незалежного контуру по всіх його елементах протікає власний контурний струм, а струм кожної з віток утворюється накладанням контурних струмів суміжних контурів, для яких ця вітка є спільним елементом. Це дозволяє на першому етапі застосування МКС зменшити кількість рівнянь відносно невідомих величин контурних струмів до кількості рівнянь, що складається за другим законом Кірхгофа для напруг незалежних контурів $k_2 = v - u + 1 - n_J$, *де* v *- загальна кількість віток досліджуваної схеми,* u *- кількість вузлів,* n_J *- кількість віток з ідеальними джерелами струму. На другому етапі застосування методу розраховують струми віток як алгебраїчні суми суміжних контурних струмів.*

2.1. Основне співвідношення методу контурних струмів для електричного кола постійного струму, що складається з *RE*-віток

Усі можливі види *RE*-віток кола постійного струму з урахуванням можливих варіантів орієнтації ЕРС вітки відносно напряму її струму з’єднаємо у контур (рис. 2.1) та вважатимемо його ділянкою складнішого кола, представленого струмами контурів, суміжних до утвореного.

Позначимо кожний з контурних струмів такого кола символом J з подвійним індексом, що вказує на номер незалежного контуру, та зорієнтуємо їх за напрямом руху годинникової стрілки. Виділеному контуру, що складається з усіх можливих віток, надамо номер n, а усім суміжним до нього контурам - числа натурального ряду від 1 до 5. Напрями струмів I_i та напруг U_i віток приймемо узгодженими з напрямом обходу n-го контуру, а параметри елементів віток індексуватимемо відповідно до номеру суміжного контуру.

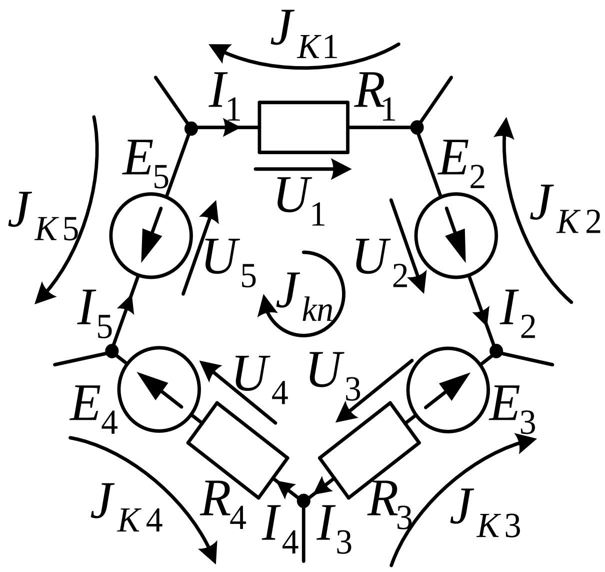


Рис. 2.1

Тоді вольт-амперні характеристики цих віток описуються наступними виразами:

$$U_1 = I_1 R_1;\ U_2 = -E_2;$$
$$U_3 = I_3 R_3 + E_3;\ U_4 = I_4 R_4 - E_4;\ U_5 = -E_5.$$

Ці формули можна узагальнити наступним виразом:

$$U_i = I_i R_i^B - E_i^B;\ i = 1...5, \tag{2.1}$$

де R_i^B, E_i^B - опір та ЕРС *i*-ої *RE*-вітки. Опір вітки дорівнює арифметичній сумі опорів усіх її елементів (нагадаємо, що внутрішній опір ідеального джерела напруги нульовий), а ЕРС вітки дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС усіх її елементів, причому ЕРС елемента враховується в зазначеній сумі зі знаком «плюс», якщо її напрям збігається з напрямом струму, тобто в даному випадку з напрямом обходу *n*-го контуру.

Відповідно до основної ідеї МКС представимо струм кожної вітки з виразу (2.1) різницею контурних струмів, оскільки вони обтікають кожну вітку в протилежних напрямах:

$$I_i = J_{kn} - J_{ki}, \tag{2.2}$$

та підставимо це значення в формулу (2.2). Після додавання усіх напруг віток матимемо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{5} U_i = \sum_{i=1}^{5} \left(J_{kn} - J_{ki} \right) R_i^B - \sum_{i=1}^{5} E_i^B.$$

Сума напруг усіх віток *k*-го контуру у лівій частині останнього рівняння дорівнює нулю за другим законом Кірхгофа. Після множення на -1 обох частин рівності та еквівалентного перетворення виразів під знаками сум матимемо рівняння для контурного струму досліджуваного контуру:

$$J_{kn} \sum_{i=1}^{5} R_i^B - \sum_{i=1}^{5} J_{ki} R_i^B = \sum_{i=1}^{5} E_i^B.$$

З’ясуємо та узагальнимо зміст кожної суми в отриманій формулі. $\sum_{i=1}^{5} R_i^B = R_1 + R_3 + R_4$ є арифметичною сумою опорів усіх віток виділеного *n*-го контуру. У загальному випадку *власним опором контуру називають арифметичну суму опорів усіх його RE-віток:*

$$R_{kn} = \sum_{i \in Mn} R_i^B,$$

де додавання ведеться по всіх індексах *i*, що складають множину M_n номерів віток *n*-го контуру. З іншого боку, індекс *i* в наступній сумі позначає номер суміжного контуру, а R_i^B є опором вітки, спільної для пари контурів з номерами *n* та *i*. *Взаємним опором двох суміжних контурів з номерами* n *та i називають опір їх спільної RE-вітки,* який позначають $R_{n^з}$. Для схеми на рис. 2.1 $R_{n1} = R_1$; $R_{n2} = 0$; $R_{n3} = R_3$; $R_{n4} = R_4$; $R_{n5} = 0$. Нарешті, вираз у правій частині формули $\sum_{i=1}^{5} E_i^B = E_2 - E_3 + E_4 - E_5$ є алгебраїчною сумою ЕРС усіх віток, що входить до досліджуваного контуру та утворюють результуючу ЕРС цього контуру. В загальному випадку *контурною ЕРС називають алгебраїчну суму ЕРС усіх віток, що входять до цього контуру:*

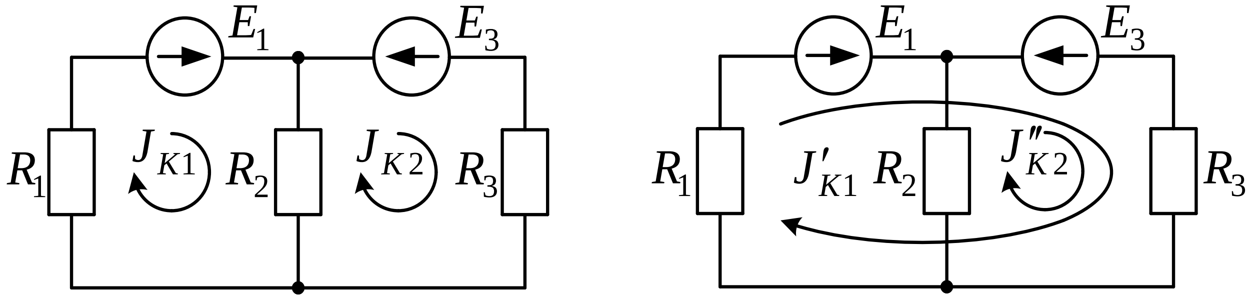
$$\mathring{A}_{kn} = \sum_{i \in Mn} E_i^B,$$

причому ЕРС віток, напрями яких збігаються із обраним напрямом контурного струму, входять у зазначену суму зі знаком «плюс», інакше – зі знаком «мінус». З урахуванням уведених позначень узагальнена форма рівняння відносно невідомих контурних струмів набуває вигляду:

$$J_{kn}R_{kn} - \sum_{i\in \hat{I}\ n} J_{ki}R_{ni} = E_{kn}. \qquad (2.3)$$

Знаки «мінус» при кожному з добутків суміжного контурного струму на взаємний контурний опір зумовлені однаковим орієнтуванням контурних струмів (у даному випадку за напрямом руху годинникової стрілки), внаслідок чого через кожну вітку даного контуру вказані контурні струми протікають в різних напрямах. Це вносить певну впорядкованість в процедуру формування рівнянь та не вимагає первісної орієнтації струмів віток на першому етапі застосування методу. Правило формування системи рівнянь за МКС для кожного незалежного контуру відповідно до формули (2.3): *струм досліджуваного контуру, помножений на його власний опір, мінус сума добутків взаємних контурних опорів на струми суміжних контурів дорівнює контурній ЕРС.*

Приклад 2.1. *Для схеми на рис. 2.2 а скласти систему скалярних рівнянь за МКС, вважаючи відомими позначені параметри елементів.*



а) б)

Рис. 2.2

Позначаємо два незалежні контурні струми J_{K1}, J_{K2}. Перший незалежний контур складається з двох віток R_1E_1 та R_2. Сума опорів цих віток утворюють власний опір першого контуру $R_{11} = R_1 + R_2$. Єдиним суміжним контуром до першого є другий контур. Спільною віткою між першим та другим контуром є вітка R_2, тому взаємний контурним опором $R_{12} = R_2$. В перший контур входить лише ЕРС E_1, причому її напрям збігається із обраним напрямом контурного струму, тому $E_{k1} = E_1$. Таким чином, рівняння для першого контурного струму набуває вигляду:

$$J_{k1}(R_1 + R_2) - J_{k2}R_2 = E_1. \qquad (2.4)$$

Другий незалежний контур складається з двох віток R_2 та R_3E_3, тому $R_{k2} = R_2 + R_3$. Єдиним суміжним контуром до другого є перший контур зі спільною віткою R_2. Очевидно, що взаємним опором між першим та другим контуром буде такий самий, як між другим та першим, тобто $R_{12} = R_{21} = R_2$. В другий контур входить лише ЕРС E_3, причому її напрям протилежний обраному напряму контурного струму, тому $E_{k2} = - E_3$. Таким чином, рівняння для другого контурного струму набуває вигляду:

$$J_{k2}(R_2 + R_3) - J_{k1}R_2 = -E_3. \qquad (2.5)$$

Рівняння (2.4) та (2.5) утворюють систему двох рівнянь з двома невідомими контурними струмами:

$$\begin{cases} J_{K1}(R_1 + R_2) - J_{K2}R_2 = E_1; \\ J_{K2}(R_2 + R_3) - J_{K1}R_2 = -E_3. \end{cases} \qquad (2.6)$$

Відзначена у прикладі 2.1 властивість рівності взаємних опорів суміжних контурів справедлива для будь-якої пари контурів електричного кола з зазначеними вітками, тому в загальному випадку *взаємний опір двох контурів не залежить від порядку індексів:*

$$R_{ij} = R_{ji}; i \neq j.$$

Систему рівнянь (2.6) зручніше одразу формувати в матричному вигляді. Для цього вводять вектор-стовпець невідомих контурних струмів, що складається з двох координат J_{K1} та J_{K2}. З урахуванням правила матричного множення (додаток М1) цей вектор множиться зліва на матрицю контурних опорів розмірності 2×2, вздовж головної діагоналі якої розташовані власні опори контурів, вище та нижче головної діагоналі – взаємні опори контурів, причому ця матриця симетрична відносно головної діагоналі. Результатом добутку матриці контурних опорів (МКО) на вектор невідомих контурних струмів є вектор контурних ЕРС такої самої розмірності, що і вектор невідомих. Тобто матрично-векторна форма системи рівнянь за МКС для довільного електричного кола з двома незалежними контурами має наступний загальний вигляд

$$\begin{Vmatrix} R_{11} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_{K1} \\ E_{K2} \end{Vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Приклад 2.2. *Для схеми на рис. 2.2а скласти векторно-матричну систему рівнянь за МКС та знайти струми віток за таких значень параметрів елементів* $R_i = i\,Ом; i = 1, 2, 3; E_1 = 10\,В; E_3 = 20\,В.$

Індекси елементів МКО та вектора контурних ЕРС відповідають номерам незалежних контурів, тобто в клітинки 11 та 22 записують суму опорів віток першого та другого незалежних контурів відповідно, в клітинки 12 та 21 – опір спільної вітки для обох контурів, взятий зі знаком «мінус». Першим та другим елементами вектора в правій частині рівності (2.7) є перша та друга контурні ЕРС відповідно. Отже, матрично-векторна форма системи рівнянь за МКС для заданого електричного кола записують так:

$$\begin{Vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J_{K1} \\ J_{K2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1 \\ -E_3 \end{Vmatrix}.$$

При заданих числових значеннях параметрів елементів кола, система рівнянь в матрично-векторній формі (2.6) може безпосередньо заповнюватися цими значеннями. Тоді ця система рівнянь приймає таку числову форму:

$$\begin{Vmatrix} 1+2 & -2 \\ -2 & 2+3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J_{K1} \\ J_{K2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10 \\ -20 \end{Vmatrix}.$$

Після виконання арифметичних дій в клітинках матриці невідомі контурні струми можуть бути знайдені будь-яким способом відомим з математики способом, наприклад, за правилом Крамера (додаток М2):

$$J_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -20 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10 \times 5 - (-20) \times (-2)}{3 \times 5 - (-2) \times (-2)} = \frac{10}{11}\,\text{А};$$

$$J_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -2 & -20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times (-20) - (-2 \times)10}{3 \times 5 - (-2) \times (-2)} = -\frac{40}{11}\,\text{А}.$$

Далі за відомими контурними струмами визначають струми віток. Попередньо їх орієнтують таким чином (рис. 2.2 а), щоб з урахуванням числових контурних струмів отримати додатні значення струмів віток:

$$I_2 = J_{k1} = \frac{10}{11}\,\text{А};$$

$$I_2 = J_{k1} - J_{k2} = \frac{10}{11} - \left(-\frac{40}{11}\right) = \frac{50}{11}\,\text{А};$$

$$I_3 = -J_{k2} = -\left(-\frac{40}{11}\right) = \frac{40}{11}\,\text{А}.$$

Зауважимо, що для обчислення струму I_2 знадобилися числові значення обох контурних струмів. Можна обійтися одним, якщо спрямувати контурні струми так, щоб вітку з шуканим струмом обтікав лише один контурний струм.

Приклад 2.3. *Для схеми на рис. 2.2а за таких же самих значень параметрів елементів знайти струм другої вітки як контурний.*

Напрями контурних струмів, що задовольняють поставленій задачі, наведено на рис. 2.2б. При цьому вітка R_3E_3 є спільною для двох контурів і числова матрично-векторна форма системи рівнянь за МКС записується так:

$$\begin{Vmatrix} 1+3 & -3 \\ -3 & 2+3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J'_{k1} \\ J'_{k2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 10-20 \\ 20 \end{Vmatrix}.$$

Контурні струми цієї схеми будуть відрізнятися від контурних струмів попередньої схеми, тому їх позначено зі штрихами. Шуканий струм вітки знаходять як другий контурний:

$$I_2 = J'_{K2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -10 \\ -3 & 20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{4\times 20-(-3)\times(-10)}{4\times 5-(-3)\times(-3)} = \frac{50}{11}\,À,$$

що збігається з результатом попереднього прикладу.

2.2. Врахування в рівняннях методу контурних струмів параметрів ідеальних джерел струму

Знімемо обмеження на види віток електричного кола постійного струму, до яких застосовується МКС. Для цього розглянемо вітку у вигляді ІДС з параметром J, що входить до незалежного контуру з номером 0, інші M_0 віток якого належать до множини RE-віток (рис. 2.3 а). Через ці вітки протікають контурні струми суміжних контурів, викликаних відповідними контурними ЕРС, що не показані на рис. 2.3 а.

В контурі, що замикається через джерело J, циркулює власний контурний струм $J_{k0} = J$, створюючи відповідно до основної ідеї МКС додаткові складові струмів величиною J в усіх M_0 вітках. Ці складові спричинюють появи падінь напруг

$$\Delta U_i = JR_i, i \in M_0.$$

Кожна така напруга може бути змодельована ідеальним джерелом напруги, параметр якої дорівнює JR_i, а напрям ЕРС протилежний напряму обходу 0-го контуру. Таким чином, *розрив вітки з ІДС еквівалентний встановленню в кожну RE-вітку, що належить шляху між затискачами джерела, ідеального джерела напруги, ЕРС якого дорівнює добутку параметра ІДС на внутрішній опір вітки, а напрям ЕРС протилежний напряму струму джерела*. На рис. 2.3 б показана еквівалентна схема ділянки кола з рис. 2.3 а після розриву джерела J.

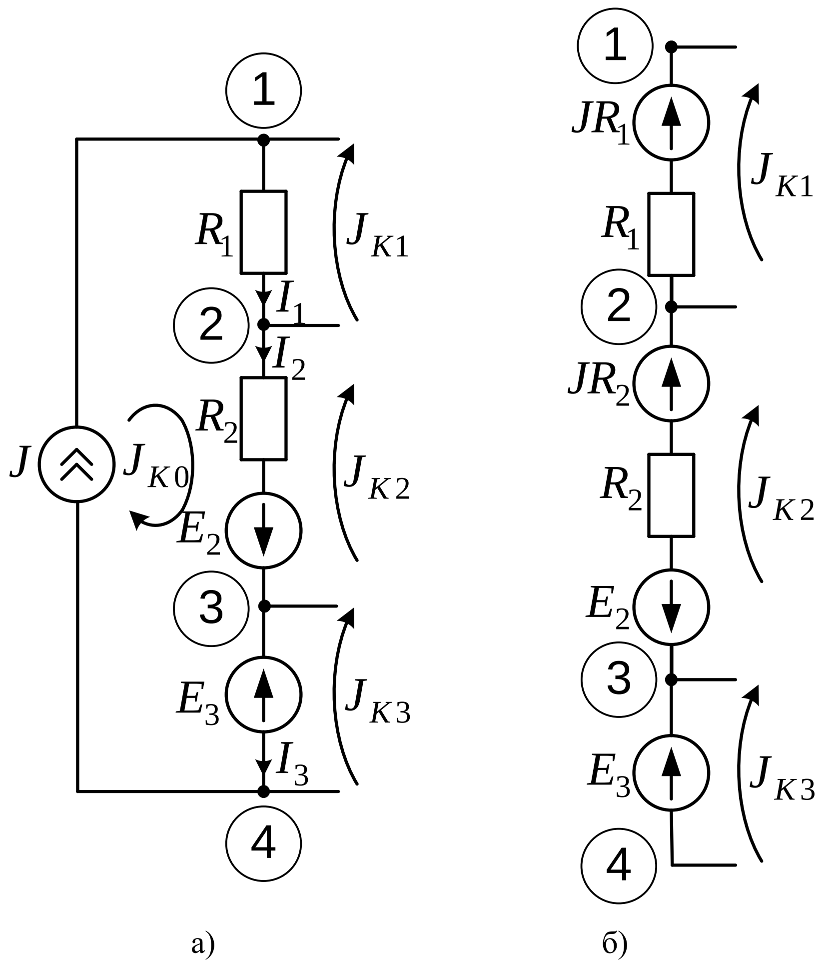
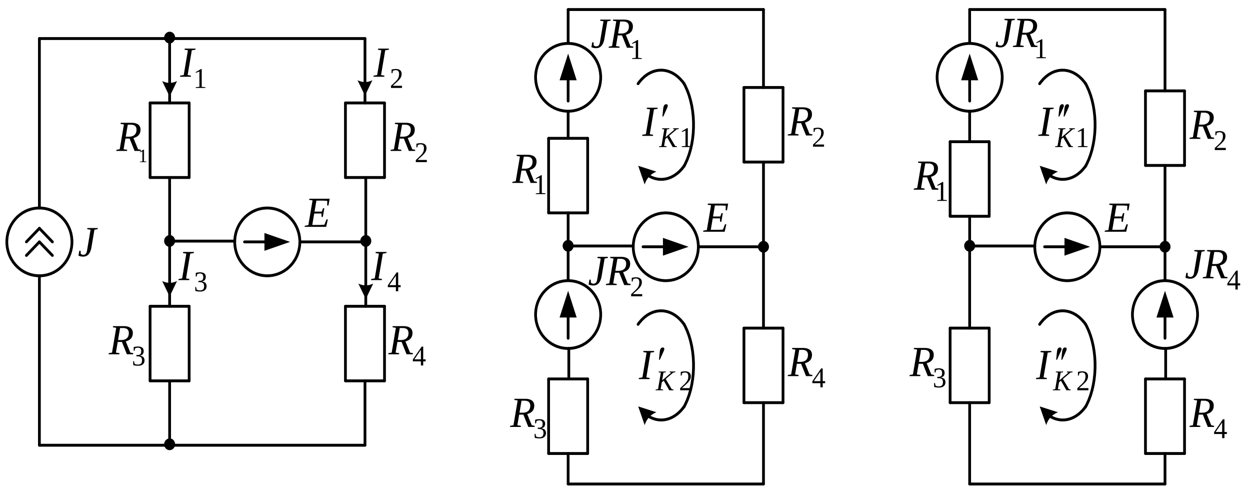


Рис. 2.3

У вітці з ІДН E_3 додаткове джерело напруги не встановлюється, оскільки його параметр дорівнює нулю через нульовий опір зазначеної вітки. Врахування додаткових параметрів джерел напруг не є проблемою МКС та здійснюється за загальними правилами. Слід мати на увазі, що еквівалентне перетворення ділянки кола шляхом розриву вітки з джерелом струму J та встановлення ІДН з залежними від J параметрами у всі RE-вітки шляху, що замикає точки під'єднання ІДС, може бути багатоваріантним та гарантує незмінність струмів лише не перетворюваних віток. *Струми віток, в яких з'являються залежні джерела напруги, знаходяться додаванням розрахованих контурних струмів та струму джерела, що видаляється.*

Приклад 2.4. *Розрахувати струми віток за МКС з видаленням джерела струму в схемі електричного кола на рис. 2.4а, обравши два різні шляхи з RE-віток, що замикають точки під'єднання ІДС.*



а) б) в)

Рис.2.4

Оберемо перший шлях, що замикає точки приєднання ІДС, через вітки R_1 та R_2, тоді еквівалентна схема для розрахунку контурних струмів першого варіанту представлена на рис. 2.4б. Вона має два незалежних контури, що позначені круговими стрілками, та нульовий взаємний опір контурів, а система рівнянь за МКС має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + R_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I'_{k1} \\ I'_{k2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} JR_1 - E \\ JR_3 + E \end{Vmatrix}.$$

Діагональна МКО зумовлює спрощений розв'язок цієї системи рівнянь

$$I'_{k1} = \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2}; I'_{k2} = \frac{JR_3 + E}{R_3 + R_4}.$$

Струми не перетворюваних віток визначаються розрахованими контурними струмами:

$$I_2 = I'_{k1} = \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2}; \quad I_4 = I'_{k2} = \frac{E + JR_3}{R_3 + R_4}.$$

Струми перетворюваних віток визначаються накладанням розрахованих контурних струмів та струму джерела J з урахуванням їх напрямів:

$$I_1 = J - I'_{k1} = J - \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2} = \frac{JR_2 + E}{R_1 + R_2}; I_3 = J - I'_{k2} = J - \frac{JR_3 + E}{R_3 + R_4} = \frac{JR_4 - E}{R_3 + R_4}.$$

Другий шлях, що замикає точки під'єднання ІДС, проведемо через вітки R_1, E та R_4, тоді еквівалентна схема для розрахунку контурних струмів другого варіанту представлена на рис. 2.4в. Система рівнянь за МКС для неї має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} R_1 + R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + R_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I''_{k1} \\ I''_{k2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} JR_1 - E \\ E - JR_4 \end{Vmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи рівнянь

$$I''_{k1} = \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2}; \quad I''_{k2} = \frac{E - JR_4}{R_3 + R_4}.$$

Струми не перетворюваних віток визначаються розрахованими контурними струмами:

$$I_2 = I''_{k1} = \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2}; \; I_3 = -I''_{k2} = \frac{JR_4 - E}{R_3 + R_4};$$

Струми перетворюваних віток визначаються накладанням розрахованих контурних струмів та струму джерела J:

$$I_1 = J - I''_{k1} = J - \frac{JR_1 - E}{R_1 + R_2} = \frac{JR_2 + E}{R_1 + R_2}; I_4 = J - I''_{k2} = J + \frac{E - JR_4}{R_3 + R_4} = \frac{E + JR_3}{R_3 + R_4}.$$

Як бачимо, не зважаючи на різні значення контурних струмів I'_{k2} та I''_{k2}, струми віток, розраховані за МКС при двох різних еквівалентних перетвореннях джерела струму, повністю збігаються.

2.3. Алгоритм розрахунку електричного кола постійного струму за методом контурних струмів

1. Визначаємо кількість незалежних контурів досліджуваного кола, що складаються з RE-віток.

2. За наявності джерел струму здійснюємо еквівалентне перетворення схеми, видаливши усі ці джерела струму, та включивши залежні джерела напруги послідовно з RE - вітками, що замикають шляхи між затискачами кожного з видалених джерел. Параметри кожного з залежних джерел напруги розраховують як добуток опору вітки, в яку воно встановлюється, та параметра джерела струму, що видаляється.

3. На основі аналізу схеми формуємо матрично-векторну систему рівнянь в числовому вигляді для невідомих контурних струмів.

4. Розв'язуємо систему рівнянь і отримуємо числові значення контурних струмів

5. Знаходимо значення струмів віток, що не перетворювалися, накладанням отриманих контурних струмів, для знаходження струмів перетворюваних віток додаємо до суміжних контурних струмів струм ІДС.

6. Перевіряємо вірність розрахунку балансом потужностей.

Приклад 2.5. *Проілюструвати зазначений алгоритм розрахунком електричного кола на рис. 2.5а за МКС, якщо параметри елементів мають наступні значення:*
$E_1 = 29В; E_4 = 27В; E_5 = 36В; J = 2А; R_1 = R_2' = R_2'' = 1Ом; R_3 = 3Ом; R_4 = 4Ом;\ R_5 = 5Ом; R_6 = 6Ом.$

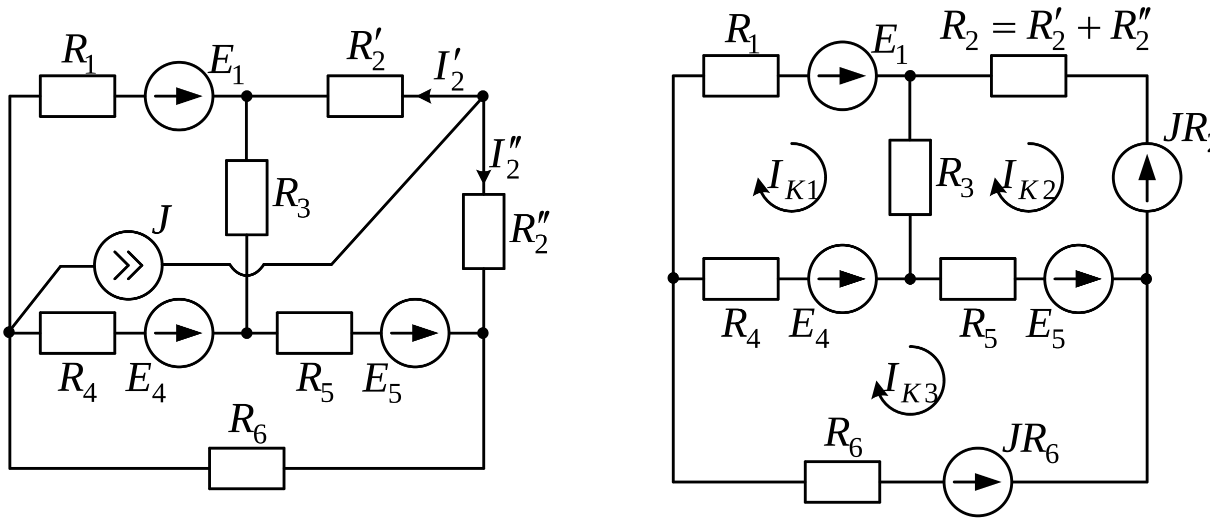
1. Досліджуване коло містить v =7 віток, u=5 вузлів та $n_J = 1$ вітку з джерелом струму. Знаходимо кількість незалежних контурів перетвореної схеми з розірваною віткою струму

$$k_2 = v - u + 1 - n_J = 7 - 5 + 1 - 1 = 3.$$

2. Обираємо шлях з віток R_2'' та R_6, що замикає контур з джерелом струму, та здійснюємо еквівалентне перетворення схеми, видаливши джерело струму, включивши залежні джерела напруги послідовно з зазначеними вітками та замінивши послідовне з'єднання опорів R_2' та R_2'', що утворилося в результаті розриву, одним еквівалентним R_2 = 2 Ом (рис. 2. 5). Обираємо незалежні контури, орієнтуємо їх напрями обходу та позначаємо в них три контурні струми.

3. Формуємо матрично-векторну систему рівнянь для невідомих контурних струмів. Для цього утворюємо МКО розмірності 3 × 3, заповнюємо її головну діагональ відповідними власними опорами контурів, заповнюємо матрицю вище головної діагоналі взятими зі знаком «мінус» взаємними опорами контурів та нижче головної діагоналі – симетричним переносом внесених значень від'ємних взаємних опорів:

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} R1+R3+R4 & -R3 & -R4 \\ -R3 & R2+R3+R5 & -R5 \\ -R4 & -R5 & R4+R5+R6 \end{Vmatrix}.$$



а) б)

Рис.2.5

Формуємо вектор-стовпець контурних ЕРС, вносячи в них за звичайними правилами знаків алгебраїчну суму параметрів залежних та незалежних джерел кожного незалежного контуру:

$$\boldsymbol{E} = \begin{Vmatrix} E_{k1} \\ E_{k2} \\ E_{k3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1 - E_4 \\ -E_5 - JR_2' \\ E_4 + E_5 - JR_6 \end{Vmatrix}.$$

Після виконання арифметичних операцій над виразами з заданими параметрами елементів матимемо числову матрично-векторну систему рівнянь відносно невідомих контурних струмів:

$$\begin{Vmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & -5 \\ -4 & -5 & 15 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} \\ I_{K3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -38 \\ 51 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язавши систему рівнянь, отримуємо числові значення контурних струмів:

$$\begin{Vmatrix} I_{K1} \\ I_{K2} \\ I_{K3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix}.$$

Цей розв’язок дійсно задовольняє складену систему рівнянь, оскільки

$$\begin{Vmatrix} 8 & -3 & -4 \\ -3 & 10 & -5 \\ -4 & -5 & 15 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8+6-12 \\ -3-20-15 \\ -4+10+45 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -38 \\ 51 \end{Vmatrix}.$$

5. З урахуванням знаків отриманих контурних струмів спрямовуємо струми віток так, щоб отримати їх додатні значення. Знаходимо значення струмів віток, що не перетворювалися, накладанням отриманих контурних струмів:

$$I_1 = I_{k1} = 1; I_2' = -I_{k2} = 2; I_3 = I_{k1} - I_{k2} = 1-(-2) = 3;$$
$$I_4 = I_{k3} - I_{k1} = 3-1 = 2; I_5 = I_{k3} - I_{k2} = 3-(-2) = 5.$$

Знаходимо значення струмів перетворюваних віток накладанням контурних струмів та струму ІДС:

$$I_2'' = I_{k2} + J = -2+2 = 0;\ I_6 = I_{33} + J = 3+2 = 5.$$

6. Перевіряємо вірність розрахунку балансом потужностей.

Складаємо баланс потужностей у символьному вигляді:

$$E_1 I_1 + E_4 I_4 + E_5 I_5 + JU_J = I_1^2 R_1 + (I_2')^2 R_2' + (I_2'')^2 R_2'' + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6.$$

Обчислюємо напругу ІДС як суму напруг резисторів R_2'' та R_6:

$$U_J = I_2'' R_2'' + I_6 R_6 = 0 + 5\times 6 = 30B.$$

Підставляємо числові значення усіх отриманих величин та окремо обчислюємо ліву та праву частини рівняння балансу:

$$P_{ÄÆ} = 29\times 1 + 27\times 2 + 36\times 5 + 2\times 30 = 29 + 54 + 180 + 60 = 323\ \text{Вт}.$$

$$P_{ÑÏ} = 1^2\times 1 + 2^2\times 1 + 3^2\times 3 + 2^2\times 4 + 5^2\times 5 + 5^2\times 6 = 1 + 4 + 27 + 16 + (5+6)\times 25 = 323\ \text{Вт}.$$

Баланс зійшовся, отже розрахунки виконані вірно.

Розділ 3. МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Основна ідея методу вузлових потенціалів (МВП) полягає у вираженні струмів віток через різницю потенціалів вузлів, до яких вони приєднані, що дозволяє на першому етапі застосування МВП зменшити кількість рівнянь відносно невідомих потенціалів вузлів до кількості рівнянь, що складається за першим законом Кірхгофа для струмів незалежних вузлів $k_1 = u - 1 - n_E$, *де* u *- кількість вузлів досліджуваної схеми,* n_E *– кількість віток - ідеальних джерел напруги. На другому етапі застосування методу розраховують струми віток через знайдені потенціали вузлів, а також ЕРС та провідності самих віток.*

3.1. Основне співвідношення методу контурних струмів для електричного кола постійного струму, що складається з *GJ* – віток

Нагадаємо, що до множини *GJ*-віток відносяться такі, що допускають вираження струму вітки через її напругу, тобто усі вітки кола постійного струму за виключенням ідеальних джерел напруги. Усі можливі види *GJ*-віток кола постійного струму з урахуванням можливих варіантів орієнтації джерел відносно напрямів їх струмів з'єднаємо у вузол з номером k (рис. 3.1) та вважатимемо його ділянкою складнішого кола, представленого потенціалами вузлів, суміжних до утвореного, що пронумеровані числами натурального ряду від 1 до 5.

Усі струми та напруги віток спрямуємо до досліджуваного k-го вузла, а параметри елементів віток індексуватимемо відповідно до номеру суміжного вузла. Тоді у вольт-амперні характеристики цих віток, що виражають струми через напруги, підставимо значення кожної напруги вітки як різницю потенціалів відповідних вузлів:

$$I_1 = -J_1;$$
$$I_2 = J_2;$$
$$I_3 = (U_3 - E_3) / R_3 = (\varphi_3 - \varphi_k - E_3)G_3;$$
$$I_4 = U_4 / R_4 = (\varphi_4 - \varphi_k)G_4;$$
$$I_5 = (U_5 + E_5) / R_5 = (\varphi_5 - \varphi_k + E_5)G_5.$$

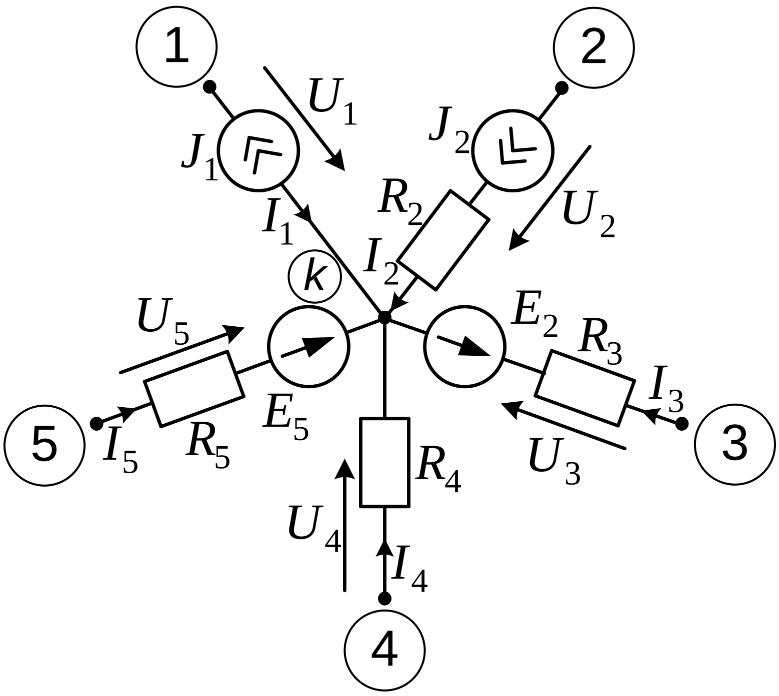


Рис. 3.1

Ці формули можна узагальнити наступним виразом:

$$I_i = (\varphi_i - \varphi_k + E_i^B)G_i^B + J_i^B; i = 1...5, \tag{3.1}$$

де G_i^B, E_i^B, J_i^B – провідність, ЕРС та струм ідеального джерела *i*-ої *GJ*-вітки, що приєднана до *k*-го вузла (нагадаємо, що провідність вітки з ідеальним джерелом струму дорівнює нулю).

Параметри усіх джерел в формулі (3.1) враховуються зі знаком «плюс», якщо напрям стрілки джерела збігається з напрямом струму вітки, тобто стрілка джерела вітки спрямована до досліджуваного *k*-го вузла, інакше вони враховуються зі знаком «мінус». Після додавання усіх струмів розглянутих віток матимемо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{5} I_i = \sum_{i=1}^{5} (\varphi_i - \varphi_k + E_i^B) G_i^B + \sum_{i=1}^{5} J_i^B.$$

Сума струмів усіх віток k-го вузла у лівій частині останнього рівняння дорівнює нулю за першим законом Кірхгофа. Після перенесення доданків з потенціалами в ліву частину рівності та еквівалентного перетворення виразів під знаками сум матимемо рівняння для потенціалу досліджуваного вузла:

$$\varphi_k \sum_{i=1}^{5} G_i^B - \sum_{i=1}^{5} \varphi_i G_i^B = \sum_{i=1}^{5} (J_i^B + E_i^B G_i^B).$$

З'ясуємо та узагальнимо зміст кожної суми в отриманій формулі. $\sum_{i=1}^{5} G_i^B = G_3 + G_4 + G_5$ є арифметичною сумою провідностей усіх віток виділеного k-го вузла. В загальному випадку *власною провідністю вузла називають арифметичну суму провідностей усіх його GJ-віток:*

$$G_{kk} = \sum_{i \in Nk} G_i^B,$$

де додавання ведеться по всіх індексах i, що складають множину N_k номерів віток k-го вузла. З іншого боку, індекс i в наступній сумі позначає номер суміжного вузла, а G_i^B є провідністю вітки, спільної для пари вузлів з номерами k та i. Таких віток в загальному випадку може бути декілька, тому *взаємною провідністю двох суміжних вузлів з номерами k та i називають суму провідностей їх спільних GJ-віток,* яку позначають $G_{kз}$. Для схеми на рис. 3.1 $G_{k1} = G_{k2} = 0; G_{k3} = 1/R_3; G_{k4} = 1/R_4; G_{k5} = 1/R_5.$ Нарешті, вираз у правій частині формули $\sum_{i=1}^{5} (J_i^B + E_i^B G_i^B) = -J_1 + J_2 - E_3 G_3 + E_5 G_5$ є алгебраїчною сумою струмів джерел усіх віток, що входить до досліджуваного вузла. В загальному випадку *вузловим струмом джерел називають алгебраїчну суму параметрів ідеальних джерел струму та добутків параметрів ідеальних джерел напруги на провідності віток, що входять до цього вузла:*

$$J_{Bk} = \sum_{i \in Nk} J_i^B + E_i^B G_i^B,$$

причому параметри джерел враховуються зі знаком «плюс», якщо стрілка джерела відповідної вітки спрямована до досліджуваного вузла, інакше вони враховуються зі знаком «мінус». З урахуванням уведених позначень узагальнена форма рівняння відносно невідомих потенціалів вузлів набуває вигляду:

$$\varphi_k G_{Bk} - \sum_{i \in Nk} \varphi_i G_{ki} = J_{Bk}. \tag{3.2}$$

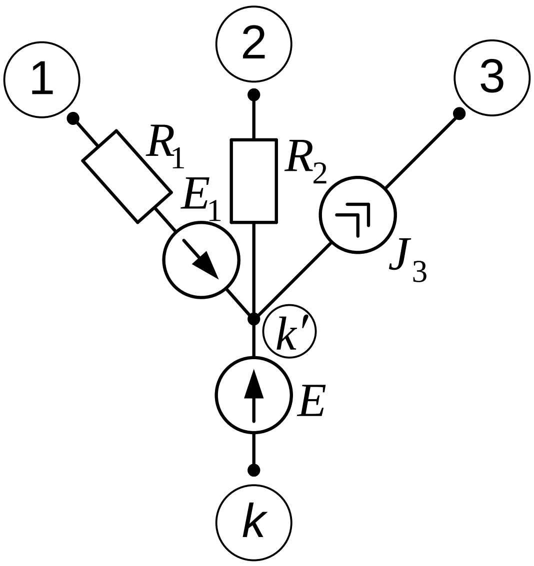
Правило формування системи рівнянь за МВП для кожного незалежного вузла відповідно до формули (3.2): *потенціал досліджуваного вузла, помножений на його власну провідність, мінус сума добутків взаємних провідностей на потенціали суміжних вузлів дорівнює вузловому струму джерел*.

Відзначимо, що в узагальнюючій формулі (3.1) струм кожної вітки виражений через різницю потенціалів вузлів, до яких вона приєднана. Отже, потенціал одного з вузлів (довільного) може бути прийнятим рівним нулю, тоді потенціали інших вузлів будуть напругами, що відраховуються відносно цього вузла. *Базисним називається вузол з нульовим потенціалом, відносно якого відраховуються потенціали інших вузлів, що називаються незалежними.* Оскільки потенціал базисного вузла відомий, рівняння відносно нього не складається, а взаємні провідності віток, що приєднані до базисного вузла, враховуються тільки у власних провідностях вузлів, до яких приєднані інші затискачі зазначених віток. На схемі електричного кола обраний базисний вузол виділяють знаком заземлення, що позначає рівність потенціалу базисного вузла потенціалу землі, який завжди приймають нульовим.

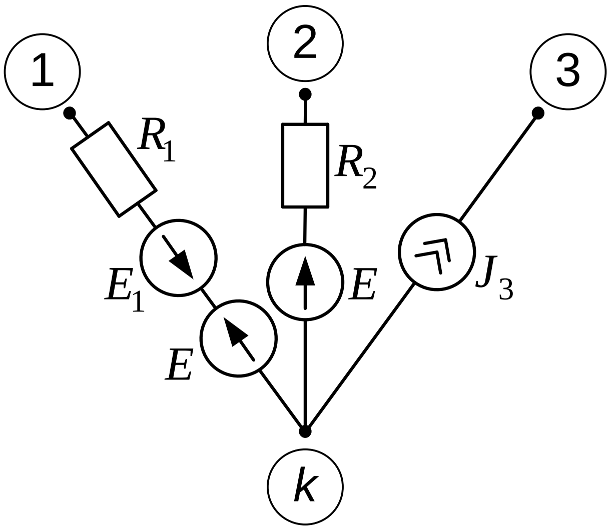
Систему рівнянь за МВП зручніше одразу формувати в матрично-векторному вигляді. Для цього вводять вектор-стовпець невідомих потенціалів, розмірність якого дорівнює кількості незалежних вузлів, тобто u - 1 для електричного кола, що складається з *GJ*-віток. Зліва цей вектор множиться на матрицю вузлових провідностей розмірності $(u-1)\times(u-1)$, вздовж головної діагоналі якої розташовані власні провідності незалежних вузлів, вище та нижче головної діагоналі – взяті зі знаком «мінус» взаємні провідності цих вузлів, причому ця матриця симетрична відносно головної діагоналі. Результатом добутку матриці вузлових провідностей на вектор невідомих потенціалів є вектор вузлових струмів джерел такої самої розмірності, що і вектор невідомих. Наприклад, матрично-векторна форма системи рівнянь за МВП для електричного кола з *GJ*-віток, що характеризується двома незалежними вузлами, має наступний загальний вигляд

$$\begin{Vmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{Vmatrix}. \tag{3.3}$$

Для встановлення правила врахування в системі рівнянь за МВП параметрів віток, що є ідеальними джерелами напруги, розглянемо ділянку електричного кола (рис. 3.2 а) з такою віткою, параметром якої є ЕРС джерела *E*, та набором *GJ*-віток з параметрами, індексованими відповідно до номерів вузлів, з якими вони з’єднані.



а)



б)

Рис. 3.2

Потенціал вузла з номером k' перевищує потенціал вузла з номером k на відому величину ЕРС джерела *E*, тому окремого рівняння для знаходження величини потенціала $\varphi_{k'}$ не складають. Струми *GJ*-віток задовольняють наступній системі рівнянь:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_k + E_1 - E)G_1 = (\varphi_1 - \varphi_k + E_1)G_1 - EG_1;$$
$$I_2 = (\varphi_2 - \varphi_k - E)G_4 = (\varphi_2 - \varphi_k)G_2 - EG_2;$$
$$I_3 = -J_3.$$

Порівняно з системою рівнянь, узагальнених в формулі (3.1), в кожному рівнянні отриманої системи фігурує виділений доданок у вигляді взятого зі знаком «мінус» добутку ЕРС джерела E на провідність вітки, в якій знаходиться струм (для струму I_3 цей добуток не проглядається, оскільки провідність третьої вітки з ІДС нульова). Такий вплив на струми GJ-віток еквівалентний «розщепленню» вузла k', до якого приєднаний один із затискачів ІДН, та встановленню в кожну GJ-вітку з ненульовою провідністю зазначеного ІДН з параметром джерела E (рис. 3.2 б). Дійсно, струми перетворених GJ-віток задовольняють вищенаведеній системі рівнянь, отже, і їх сумарний струм залишається незмінним, що доводить еквівалентність перетворення. Таким чином, *при застосуванні МВП кожну вітку у вигляді ідеального джерела напруги видаляють шляхом «розщепленню» вузла, до якого приєднаний один із затискачів цього джерела, та встановленню в кожну GJ-вітку цього вузла з ненульовою провідністю зазначеного ІДН*. Внаслідок такого еквівалентного перетворення кількість рівнянь за МВП зменшується до кількості незалежних вузлів $k_1 = u - 1 - n_E$, де n_E - кількість віток - ідеальних джерел напруги.

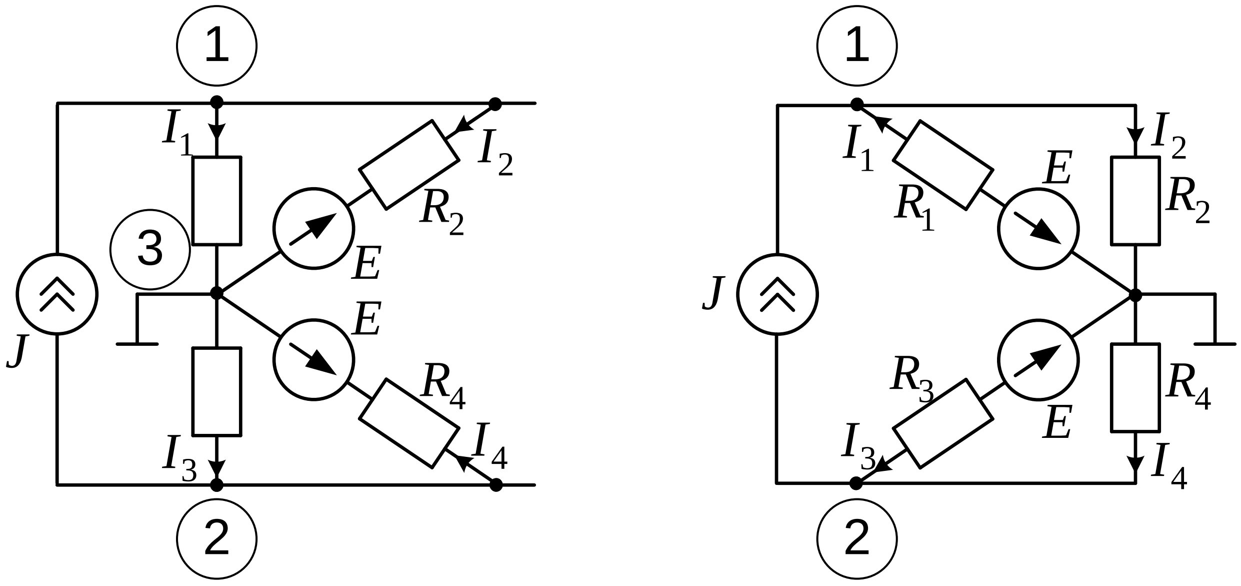
Приклад 3.1. *Розрахувати струми віток за МВП в схемі електричного кола на рис. 2.4а, обравши два різні способи його еквівалентного перетворення з видаленням вітки у вигляді ідеального джерела напруги та одного з вузлів її приєднання.*

Первісна схема електричного кола на рис. 2.4 а містить $u = 4$ вузлів та $n_E = 1$ віток - ідеальних джерел напруги. Отже розмірність вектора потенціалів незалежних вузлів буде $k_1 = u - 1 - n_E = 2$. Заземлюємо вузол 3 та обираємо перший спосіб еквівалентного перетворення кола, видаливши вітку ІДН з розщепленням вузла 4 та встановленням джерел напруги з параметром E послідовно з резисторами R_2 та R_4 (еквівалентна схема на рис. 3.3 а).

Вектор невідомих включає потенціали вузлів 1 та 2, а матрично-векторна система рівнянь за МВП має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} G_1+G_2 & 0 \\ 0 & G_2+G_4 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J+EG_2 \\ EG_4-J \end{Vmatrix},$$

де $G_1 = 1/R_i$, а взаємні провідності вузлів 1 та 2 нульові, оскільки їх з'єднує єдина вітка – ІДС J з нульовою провідністю.



а) б)

Рис. 3.3

Внаслідок діагональної структури матриці вузлових провідностей розв'язок системи рівнянь має вигляд:

$$\varphi_1 = \frac{J+EG_2}{G_1+G_2}; \varphi_2 = \frac{EG_4-J}{G_3+G_4}.$$

Струми не перетворюваних віток визначаються розрахованими потенціалами:

$$I_1 = (\varphi_1 - \varphi_3)G_1 = \frac{(J+EG_2)G_1}{G_1+G_2} = \frac{JR_2+E}{R_1+R_2};$$

$$I_3 = (\varphi_3 - \varphi_2)G_3 = \frac{(J-EG_4)G_3}{G_3+G_4} = \frac{JR_4-E}{R_3+R_4}.$$

При розрахунку струмів перетворюваних віток враховують також ЕРС джерела вітки, що видалялася:

$$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_3 - E)G_2 = \left(\frac{J+EG_2}{G_1+G_2} - E\right)G_2 = \frac{(J-EG_1)G_2}{G_1+G_2} = \frac{JR_1-E}{R_1+R_2};$$

$$I_4 = (\varphi_3 - \varphi_2 + E)G_4 = \left(\frac{J-EG_4}{G_3+G_4} + E\right)G_4 = \frac{(J+EG_3)G_4}{G_3+G_4} = \frac{JR_3+E}{R_3+R_4}.$$

Таким чином, усі розраховані за МВП струми віток збігаються з такими, що були отримані в прикладі 2.4 при застосуванні МКС, це свідчить про коректність застосування обох методів.

Другий спосіб еквівалентного перетворення кола на рис. 2.4 а полягає у видаленні вітки ІДН шляхом розщеплення вузла 3 та встановлення джерел напруги з параметром E послідовно з резисторами R_1 та R_3. При заземленні вузла маємо еквівалентну схему на рис. 3.3 б). Пропонується самостійно скласти та розв'язати систему рівнянь за МВП для цього випадку, впевнившись в тотожності остаточних виразів для струмів усіх віток.

3.2. Алгоритм розрахунку електричного кола постійного струму за методом контурних струмів

1. Визначаємо кількість незалежних вузлів досліджуваного кола за формулою $k_1 = u - 1 - n_E$, *де* u *- загальна кількість вузлів досліджуваного кола,* n_E *- кількість віток у вигляді ідеальних джерел напруги.*

2. За наявності віток – ідеальних джерел напруги здійснюють еквівалентне перетворення схеми, що полягає у видаленні кожної такої вітки шляхом розщеплення вузла, до якого приєднаний один із затискачів джерела напруги, та встановленні в кожну GJ-вітку цього вузла з ненульовою провідністю зазначеного ІДН.

3. На основі аналізу схеми формуємо матрично-векторну систему рівнянь в числовому вигляді для невідомих вузлових потенціалів незалежних вузлів.

4. Розв'язуємо систему рівнянь і отримуємо числові значення вузлових потенціалів незалежних вузлів

5. Знаходимо значення струмів усіх віток з ненульовою провідністю через отримані потенціали вузлів, при цьому для знаходження струмів перетворюваних віток окрім потенціалів вузлів враховуємо також параметри ІДН віток, що видалялися.

6. Перевіряємо вірність розрахунку балансом потужностей.

Приклад 3.2. *Проілюструвати зазначений алгоритм розрахунком електричного кола на рис. 2.5 а за МВП, якщо параметри елементів мають такі самі значення, як в прикладі 2.5:* $E_1 = 29В; E_4 = 27В; E_5 = 36В; J = 2А; R_1 = R_2' = R_2'' = 1Ом; R_3 = 3Ом; R_4 = 4Ом;$ $R_5 = 5Ом; R_6 = 6Ом.$

1. Оскільки досліджуване коло містить $u = 5$ вузлів та відсутні вітки – ідеальні джерела напруги, кількість незалежних вузлів складає

$$k_1 = u - 1 = 4.$$

2. Через відсутність віток – ідеальних джерел напруги еквівалентного перетворення схеми не виконуємо

3. Заземливши базисний вузол, як показано на рис. 2.5а, формуємо матрично-векторну систему рівнянь для чотирьох невідомих потенціалів незалежних вузлів, позначених цифрами 1…4:

$$\begin{Vmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ -G_{12} & G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{13} & -G_{23} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{14} & -G_{24} & -G_{34} & G_{44} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J_{B1} \\ J_{B2} \\ J_{B3} \\ J_{B4} \end{Vmatrix}.$$

Аналізуючи схему на рис. 2.5а, знаходимо:

власні провідності вузлів

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2'} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{7}{3}, G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{20+15+12}{60} = \frac{47}{60},$$

$$G_{33} = \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2, G_{44} = \frac{1}{R_2''} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{30+6+5}{30} = \frac{41}{30};$$

взаємні провідності вузлів

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{3}, G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_2'} = 1, G_{14} = G_{41} = G_{23} = G_{32} = 0,$$

$$G_{24} = G_{42} = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{5}, G_{34} = G_{43} = \frac{1}{R_2''} = 1;$$

вузлові струми джерел

$$J_{B1} = E_1 G_1 = \frac{29}{1} = 29, \quad J_{B2} = E_4 G_4 - E_5 G_5 = \frac{27}{4} - \frac{36}{5} = \frac{27 \times 5 - 36 \times 4}{20} = \frac{135 - 144}{20} = -\frac{9}{20},$$

$$J_{B3} = J = 2, J_{44} = E_5 G_5 = \frac{36}{5}.$$

Після підстановки числових значень матимемо матрично-векторну систему рівнянь відносно невідомих вузлових потенціалів:

$$\begin{Vmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{47}{60} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{41}{30} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 29 \\ -\frac{9}{20} \\ 2 \\ \frac{36}{5} \end{Vmatrix}.$$

4. В результаті розв'язання системи рівнянь отримуємо числові значення вузлових потенціалів:

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{47}{60} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{41}{30} \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 29 \\ -\frac{9}{20} \\ 2 \\ \frac{36}{5} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 28 \\ 19 \\ 30 \\ 30 \end{Vmatrix}.$$

5. З урахуванням значень отриманих вузлових потенціалів спрямовуємо струми віток так, щоб отримати їх додатні значення, та розраховуємо їх:

$I_1 = (E_1 - \varphi_1)/R_1 = (29-28)/1 = 1; I_2' = (\varphi_3 - \varphi_1)/R_2' = (30-28)/1 = 2; I_2'' = (\varphi_3 - \varphi_4)/R_2'' = 0;$

$I_3 = (\varphi_1 - \varphi_2)/R_3 = (28-19)/3 = 3; I_4 = (E_4 - \varphi_2)/R_4 = (27-19)/4 = 2;$

$I_5 = (E_5 + \varphi_2 - \varphi_4)/R_5 = (36+19-30)/5 = 5; I_6 = \varphi_4 / R_6 = 30/6 = 5.$

Оскільки значення струмів віток збігаються з отриманими за МКС, вірність розрахунку підтверджена, балансу потужностей не складаємо.

3.3. Метод двох вузлів

Метод двох вузлів є окремим різновидом методу вузлових потенціалів, коли загальна кількість вузлів досліджуваного кола дорівнює двом та відсутні вітки - ідеальні джерела напруги. В цьому випадку для знаходження потенціалу єдиного незалежного вузла складається не матричне, а скалярне рівняння, та спрощується алгоритм розрахунку струмів. Декілька паралельних GJ-віток можна замінити однією еквівалентною, опір якої є оберненим до власної провідності цих віток, а ЕРС дорівнює добутку цього опору на вузловий струм джерел зазначених віток.

Розрахунок струмів досліджуваного кола за МВП суттєво спрощується, якщо воно має лише два вузли. Наявність в такому колі вітки - ідеального джерела напруги робить аналіз такого кола тривіальним, оскільки одразу стають відомими потенціали обох вузлів: один з них заземлений і має нульовий потенціал, другий має потенціал, що дорівнює параметру ЕРС ідеального джерела напруги. Тому в подальшому вважатимемо, що вітки у вигляді ІДН в досліджуваному колі відсутні, тоді воно має лише один незалежний вузол. Позначимо його потенціал φ_1 тоді рівняння для його визначення матиме вигляд:

$$G_{B1}\varphi_1 = J_{B1}. \tag{3.4}$$

Таким чином, рівняння за методом двох вузлів має скалярну, а не матричну форму, в ньому відсутні взаємні провідності вузлів і, нарешті, воно має елементарний розв'язок:

$$\varphi_1 = \frac{J_{B1}}{G_{B1}}. \tag{3.5}$$

В зв'язку з цим спрощується алгоритм розрахунку кола за методом двох вузлів, який простежимо на наступному прикладі.

Приклад 3.3. *Знайти струми усіх резисторів в схемі на рис. 1.9а методом двох вузлів.*

1. Позначаємо цифрою 1 потенціал єдиного незалежного вузла, інший вузол заземлюємо (рис. 1.9 а).

2. Розраховуємо власну провідність незалежного вузла:

$$G_{11} = G_1 + G_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(См).$$

3. Розраховуємо струм джерел незалежного вузла:

$$J_{B1} = J + EG_2 = 10 + \frac{15}{2} = 17.5\ (A).$$

4. За формулою (1.5) знаходимо потенціал незалежного вузла:

$$\varphi_1 = \frac{J_{B1}}{G_{B1}} = \frac{17.5}{5/6} = 21\ (B).$$

5. Розраховуємо струми усіх резистивних віток:

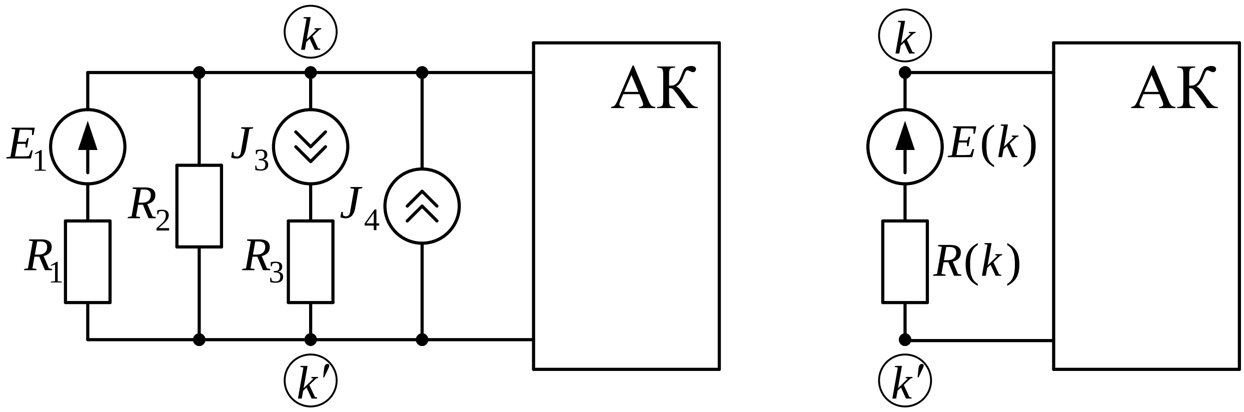
$$I_1 = \varphi_1 G_1 = \frac{21}{3} = 7(A);\ I_2 = \frac{\varphi_1 - E}{R_2} = \frac{21-15}{2} = 3(A).$$

Значення струмів збігаються з раніше отриманими в прикладі методом еквівалентного перетворення джерел, що підтверджує вірність застосування обох методів.

Розглянемо декілька паралельних *GJ*-віток, включених між двома вузлами деякого складнішого активного кола (рис. 3.4 а). Замінимо зазначені паралельні вітки однією, показаною на рис. 3.4 б, ЕРС та опір якої визначаються за формулами:

$$E_{(k)} = J_{kk} / G_{Bk}; R_{(k)} = 1 / G_{Bk}, \tag{3.6}$$

де $J_{Bk} = E_1 / R_1 - J_3 + J_4$ - вузловий струм джерел зазначених віток *k*-го вузла, $G_{Bk} = 1/R_1 + 1/R_2$ - власна провідність цих віток.



а) б)

Рис. 3.4

Внески у вузлові струми джерел з номерами k та k' сукупності віток, представлених на рис. 3.4 а, та однієї вітки на рис. 3.4 б будуть однаковими, так само, як і їх внески у власні провідності цих вузлів. Отже, потенціали вузлів k та k', а також струми та напруги всередині активного кола на рис. 3.4 не зміняться при заміні декількох паралельних *GJ*-віток однією, параметри якої визначаються за формулою (3.6), а це і є ознакою еквівалентності заміни. Таким чином, *декілька паралельних GJ-віток можна замінити однією еквівалентною, опір якої є оберненим до власної провідності цих віток, а ЕРС дорівнює добутку цього опору на вузловий струм джерел зазначених віток.*

Приклад 3.4. *Знайти аналітичні вирази для струмів усіх резисторів в схемі на рис.* 3.5 а.

Досліджувана схема містить $v = 7$ віток, $u = 4$ вузли, $v_J = 1$ джерело струму, отже, за формальними ознаками при застосуванні МКС потрібно скласти

$k_2 = v - u + 1 - v_J = 7 - 4 + 1 - 1 = 3$ рівняння, при застосуванні МВП – також три рівняння, оскільки $k_1 = u - 1 = 4 - 1 = 3$. Здійснивши еквівалентні заміни сукупностей віток, розташованих між вузлами 1,2 та 3,4 на дві одинарні, матимемо одноконтурну еквівалентну схему на рис. 3.5 б.

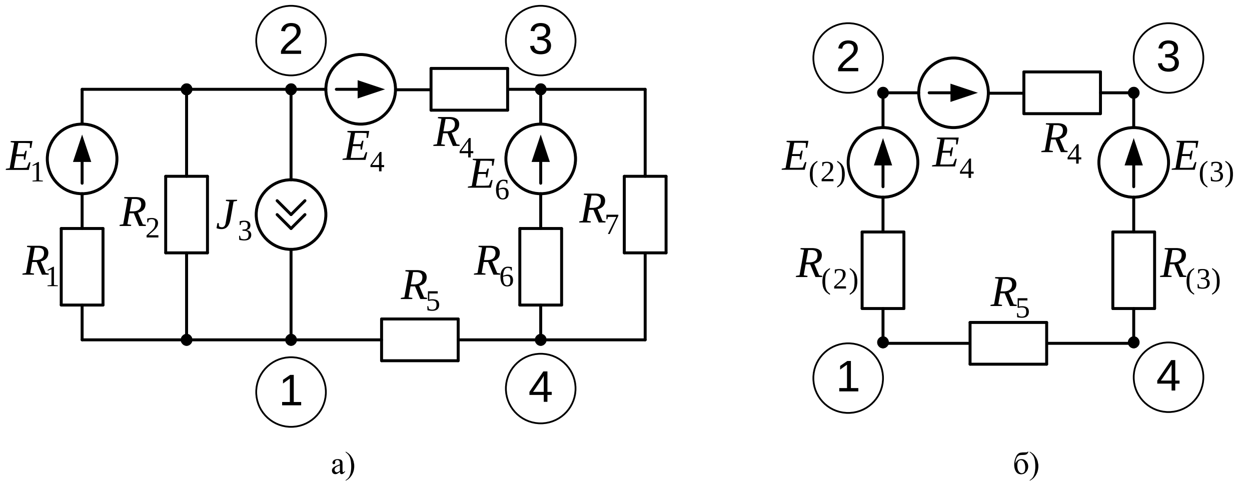


Рис. 3.5

Параметри еквівалентних віток визначаються за формулами:

$$R_{(2)} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; E_{(2)} = J_{B2} R_{(2)} = \frac{(E_1 / R_1 - J_3) R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(E_1 - J_3 R_1) R_2}{R_1 + R_2};$$

$$R_{(3)} = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7}; E_{(3)} = J_{B3} R_{(3)} = \frac{(E_6 / R_6) R_6 R_7}{R_6 + R_7} = \frac{E_6 R_7}{R_6 + R_7}.$$

Струм єдиного контуру в схемі на рис. 3.5 б

$$J_{k0} = \frac{E_{(2)} + E_4 - E_{(3)}}{R_{(2)} + R_{(3)} + R_4 + R_5}.$$

Напруги між вузлами первісної схеми

$$U_{12} = J_{k0} R_{(2)} - E_{(2)}; U_{23} = J_{k0} R_4 - E_4; U_{34} = J_{k0} R_{(3)} + E_{(3)}; U_{41} = J_{k0} R_5.$$

Струми резисторів

$$I_1 = \frac{E_1 + U_{12}}{R_1}; I_2 = \frac{U_{12}}{R_2}; I_4 = I_5 = J_{k0}; I_6 = \frac{U_{34} - E_6}{R_6}; I_7 = \frac{U_{34}}{R_7}.$$

Розділ 4. МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ СТРУМУ ТА НАПРУГИ ОДНІЄЇ ВІТКИ

4.1. Схемні функції електричного кола

В багатьох практичних застосуваннях електричне коло містить лише одне джерело напруги чи струму, що моделює первинне джерело енергії чи сигналу, а потрібно знайти реакцію на нього споживача енергії чи сигналу, що називають навантаженням. Тоді умовно вважають, що джерело підключене до вхідних, а навантаження - до вихідних затискачів кола, і постає питання визначення таких схемних функцій пасивного електричного кола, як коефіцієнти передачі за струмом та напругою, передатні та вхідні опори та провідності. Ці схемні функції не залежать від параметрів єдиного джерела, а визначаються виключно параметрами елементів пасивного кола та способами їх з'єднання.

Коефіцієнт передачі за напругою кола з чотирма зовнішніми затискачами

Нехай для заданого пасивного кола (рис. 4.1, а) з n незалежними вузлами потрібно знайти коефіцієнт передачі за напругою від вхідних (a, b) до вихідних (c, d) затискачів.

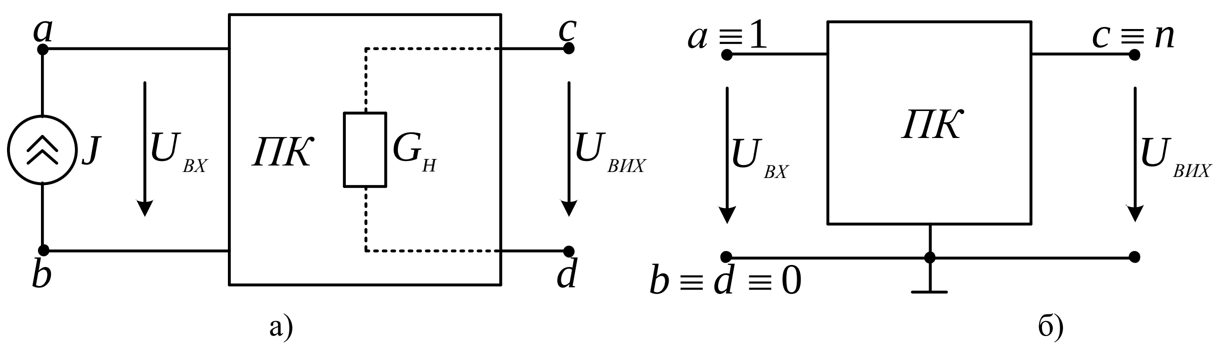


Рис. 4.1 Схема пасивного електричного кола з вхідними та вихідними затискачами: а – з чотирма зовнішніми затискачами; б – з трьома зовнішніми затискачами

Підключимо до вхідних затискачів ідеальне джерело струму J та складемо систему рівнянь електричної рівноваги за МВП, помноживши матрицю вузлових провідностей $\mathbf{G} = \left\| G_{ij} \right\|;\ i, j = \overline{1, n}$ на n – розмірний вектор потенціалів незалежних вузлів $\varphi_j,\ j = \overline{1, n}$ та врахувавши, що вектор вузлових струмів джерел тої ж самої розмірності містить лише два ненульових елементи в рядках з номерами:

$$\mathbf{G}\begin{Vmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \dots \\ \varphi_c \\ \varphi_d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} J \\ -J \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}. \qquad (4.1)$$

Із заданої системи знайдемо потенціал j-го вузла за правилом Крамера, розкривши визначник у чисельнику за двома ненульовими елементами j-го стовпчика:

$$\varphi_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{\Delta_{aj} J - \Delta_{bj} J}{\Delta} = \frac{\Delta_{aj} - \Delta_{bj}}{\Delta} J, \qquad (4.2)$$

де Δ_{ij} – алгебраїчне доповнення, $\Delta = \det \mathbf{Y}$ – визначник матриці $\mathbf{Y}$.

Знайдемо аналітичний вираз для **коефіцієнта передачі за напругою**

$$K_U = \frac{U_{\text{ÂÈÕ}}}{U_{\text{ÂÕ}}} = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{\varphi_a - \varphi_b} = \frac{(\Delta_{ac} - \Delta_{bc})J / \Delta - (\Delta_{ad} - \Delta_{bd})J / \Delta}{(\Delta_{aa} - \Delta_{ba})J / \Delta - (\Delta_{ba} - \Delta_{bb})J / \Delta} =$$

$$= \frac{\Delta_{ac} - \Delta_{bc} - \Delta_{ad} + \Delta_{bd}}{\Delta_{aa} - \Delta_{ba} - \Delta_{ba} + \Delta_{bb}} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta_{(a+b)(a+b)}}. \qquad (4.3$$

а)

де $\Delta_{(a+b)(c+d)}$ – сумарне алгебраїчне доповнення (детальніше в додатку Математика).

Приклад 4.1. *Знайти умову рівноваги* $(U_{ВИХ} = 0)$ *мостової схеми (рис. 4.2), параметри провідностей елементів якої проіндексовані відповідно до номерів вузлів, між якими ці елементи включені.*

Складемо матрицю вузлових провідностей

$$Y = \begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & Y_{12}+Y_{13} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ \hline 2 & -Y_{12} & Y_{12}+Y_{23}+Y_{20} & -Y_{23} \\ \hline 3 & -Y_{13} & -Y_{23} & Y_{13}+Y_{23}+Y_{30} \\ \hline \end{array}.$$

За формулою (4.1)

$$K_U = \frac{\Delta_{(1+0)(2+3)}}{\Delta_{(1+0)(1+0)}} = \frac{\Delta_{1(2+3)}}{\Delta_{11}}.$$

Чисельник останнього виразу має вигляд:

$$\Delta_{1(2+3)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -G_{12} & G_{12}+G_{20} \\ -G_{13} & G_{13}+G_{30} \end{vmatrix} = G_{12}G_{30} - G_{13}G_{20} = \frac{1}{R_{12}R_{30}} - \frac{1}{R_{13}R_{20}} = 0$$

Для виконання умови рівноваги $K_U = 0$ має виконуватись співвідношення.

$$R_{12}R_{30} = R_{13}R_{20}.$$

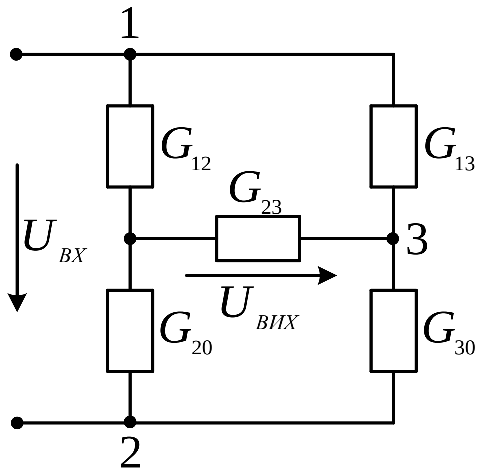


Рис. 4.2 Мостова схема

Коефіцієнт передачі за напругою кола з трьома зовнішніми затискачами

Якщо вхідна та вихідна напруга кола визначаються відносно спільного затискача (рис. 4.1 б), доцільно прийняти його потенціал рівним нулю (заземлити), інший вхідний вузол вважати першим, інший вихідний вузол – останнім:

$$b \equiv d \equiv 0;\ a \equiv 1;\ c \equiv n.$$

Тоді формула (4.1) набуває вигляду зі звичайними алгебраїчними доповненнями:

$$K_U = \frac{\Delta_{(1+0)(n+0)}}{\Delta_{(1+0)(1+0)}} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}}. \qquad (4.3б)$$

Приклад 4.2. *Знайти коефіцієнт передачі за напругою Г-подібного кола (рис. 4.3).*

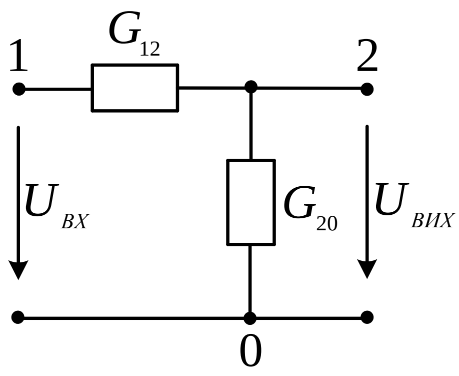


Рис. 4.3. Схема Г- подібного кола

Складаємо матрицю вузлових провідностей

$$Y = \begin{array}{c|c|c|} & 1 & 2 \\ \hline 1 & G_{12} & -G_{12} \\ \hline 2 & -G_{12} & G_{12}+G_{20} \\ \hline \end{array}$$

Знаходимо коефіцієнт передачі за напругою

$$K_U = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} = \frac{(-1)^{1+2}(-G_{12})}{G_{12}+G_{20}} = \frac{1}{1+R_{12}G_{20}}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом. Перехідні та вхідні опори та провідності

Нехай між вихідними затискачами включена провідність навантаження $G_í = 1/R_í$ (рис. 4.1 а), яка враховується в матриці вузлових провідностей. Тоді **коефіцієнт передачі** за струмом визначається формулою

$$K_I = \frac{I_{ÂÈÕ}}{I_{ÂÕ}} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d)G_í}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}G_í}{\Delta}. \qquad (4.4\ а)$$

У випадку триполюсної схеми

$$K_I = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta} G_н. \qquad (4.4\ б)$$

Передатний опір у загальному випадку

$$R_{ПЕР} = \frac{U_{ВИХ}}{I_{ВХ}} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d)}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)}}{\Delta} = K_I R_н, \qquad (4.5\ а)$$

та для триполюсної схеми

$$R_{ПЕР} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}. \qquad (4.5б)$$

Передатна провідність в загальному випадку

$$G_{ПЕР} = \frac{I_{ВИХ}}{U_{ВХ}} = \frac{(\varphi_c - \varphi_d) G_н}{(\varphi_a - \varphi_b)} = \frac{\Delta_{(a+b)(c+d)} G_н}{\Delta_{(a+b)(a+b)}} = K_U G_н, \qquad (4.6а)$$

та для триполюсної схеми

$$G_{ПЕР} = \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_{11}} G_н. \qquad (4.6б)$$

У загальному випадку $R_{ПЕР} \neq 1/G_{ПЕР}$.

Приклад 4.3. *Знайти величини $R_{ПЕР}, G_{ПЕР}$ для П-подібної схеми* (*рис. 4.4*).

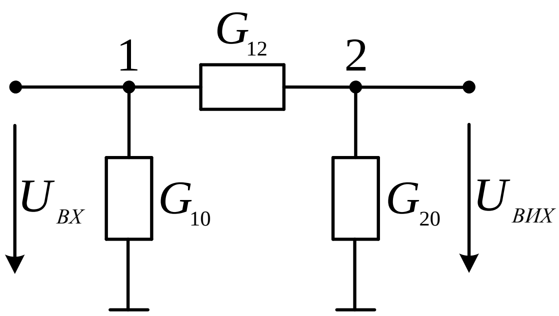


Рис. 4.4. П - подібна схема

Матриця вузлових провідностей:

$$Y = \begin{array}{c|c|c} & 1 & 2 \\ \hline 1 & G_{12} + G_{10} & -G_{12} \\ \hline 2 & -G_{12} & G_{12} + G_{20} \end{array}$$

$$R_{ПЕР} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \frac{(-1)^{1+2}(-G_{12})}{(G_{12} + G_{10})(G_{12} + G_{20}) - G_{12}^2} = \frac{G_{12}}{G_{12}(G_{10} + G_{20}) + G_{10}G_{20}}.$$

$$G_{\text{Ï ÀÐ}} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} G_H = \frac{G_{12}G_{20}}{G_{12}+G_{20}}.$$

Дійсно, $R_{ПЕР} \neq 1/G_{ПЕР}$.

Вхідний опір в загальному випадку розраховується за формулою :

$$R_{\hat{A}\tilde{O}} = \frac{U_{\hat{A}\tilde{O}}}{I_{\hat{A}\tilde{O}}} = \frac{(\varphi_a - \varphi_b)}{J} = \frac{\Delta_{(a+b)(a+b)}}{\Delta}. \qquad (4.7а)$$

Ця ж сама величина для триполюсної схеми

$$R_{\hat{A}\tilde{O}} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}. \qquad (4.7б)$$

Вхідна провідність є оберненою величиною до вхідного опору

$$Y_{\hat{A}\tilde{O}} = \frac{I_{\hat{A}\tilde{O}}}{U_{\hat{A}\tilde{O}}} = \frac{1}{R_{\hat{A}\tilde{O}}} \qquad (4.8)$$

Усі виведені за МВП формули розрахунку схемних функцій зведені в табл. 4.1.

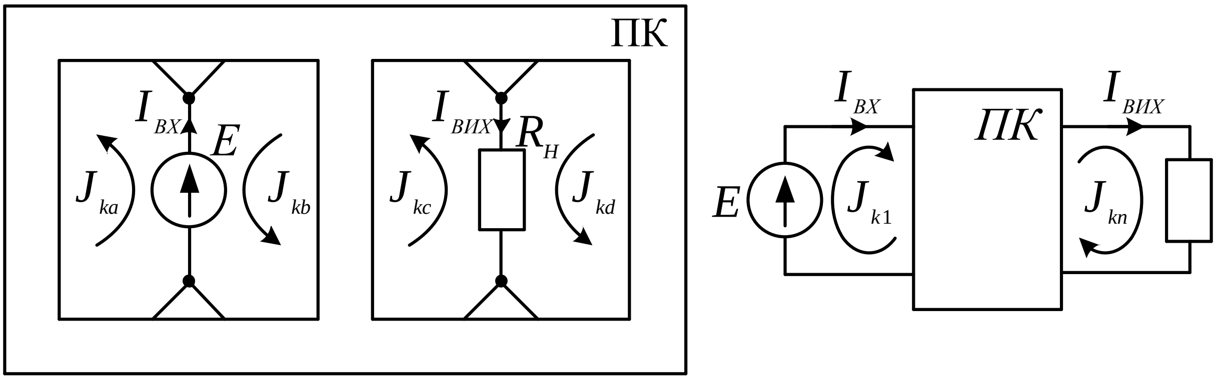
При застосуванні МКС для виведення розрахункових співвідношень для схемних функцій вважатимемо, що в загальному випадку єдине ідеальне джерело напруги з ЕРС E обтікають контурні струми J_a та J_b (рис. 4.5 а), а опір навантаження $R_{í}$ - контурні струми J_c та J_d .

$$\mathbf{R}\begin{Vmatrix} J_{ka} \\ J_{kb} \\ \ldots \\ J_{kc} \\ J_{kd} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E \\ -E \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad (4.9)$$

де $\mathbf{R} = \left\| R_{ij} \right\|$; $\quad i, j = \overline{1,n}$ є матрицею контурних струмів. За формою запису ця система повністю подібна системі (4.1), складеній за МВП. Тому, за аналогією, вираз для довільного невідомого, в даному випадку контурного струму, має вигляд:

$$J_{ki} = \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{\Delta_{ai} - \Delta_{bi}}{\Delta} E, \qquad (4.10)$$

де Δ_{ij} – алгебраїчне доповнення, $\Delta = \det \mathbf{R}$ – визначник матриці $\mathbf{R}$.



а) б)

Рис. 4.5

Коефіцієнт передачі за струмом, що визначається виразом

$$K_I = \frac{I_{\text{ÂÈÕ}}}{I_{\text{ÂÕ}}} = \frac{J_{kc} - J_{kd}}{J_{ka} - J_{kb}},$$

за формою запису аналогічним (4.3а), тому одразу запишемо кінцевий розрахунковий вираз:

$$K_I = \frac{\Delta^R_{(a+b)(c+d)}}{\Delta^R_{(a+b)(a+b)}}. \tag{4.11а}$$

При виборі системи незалежних контурів так, щоб вхідне джерело напруги та вихідний опір навантаження обтікав тільки один контурний струм (тобто, джерело й навантаження знаходяться у зовнішніх контурах, рис. 4.6 б), доцільно надати цим струмам номери a = 1 та c = n, тоді формула (4.11а) приймає вигляд:

$$K_I = \frac{\Delta^R_{1n}}{\Delta^R_{11}}. \tag{4.11б}$$

Зробивши аналогічні викладки, отримаємо аналітичні вирази для схемних функцій з використанням МКС, що зведені в табл. 4.1.

Приклад 4.4. *Знайти умову рівноваги мостової схеми на рис. 4.2, застосувавши розрахункове співвідношення за МКС.*

Складемо матрицю контурних опорів схеми на рис. 4.2, позначивши $R_{ij} = 1/G_{ij}$.

$$\mathbf{R}=\begin{Vmatrix} R_{12}+R_{20} & -R_{12} & -R_{20} \\ -R_{12} & R_{12}+R_{13}+R_{23} & -R_{23} \\ -R_{20} & -R_{23} & R_{23}+R_{20}+R_{30} \end{Vmatrix}$$

Опором навантаження є резистор R_{23}, який обтікають контурні струми J_{K2} та J_{K3}, через вхідне джерело напруги протікає лише контурний струм J_{K1}, тому за формулою з табл. 4.1.

$$K_U = \frac{\Delta_{1(2+3)} R_{23}}{\Delta}.$$

Умову рівноваги визначає рівність нулю сумарного алгебраїчного доповнення у чисельнику останнього виразу:

$$\Delta_{1(2+3)} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -R_{12} & R_{12}+R_{13} \\ -R_{20} & R_{20}+R_{30} \end{vmatrix} = (R_{12}+R_{13})R_{20} - (R_{20}+R_{30})R_{12} = R_{13}R_{20} - R_{30}R_{12} = 0,$$

що збігається з попереднім висновком.

Таблиця 4.1.

Схемна функція	**Метод вузлових потенціалів**		**Метод контурних струмів**	
	Загальний випадок	Триполюсна схема	Загальний випадок	Зовнішні контури
K_U	$\Delta_{(a+b)(c+d)} / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	$\Delta_{1n} / \Delta_{11}$	$\Delta_{(a+b)(c+d)} R_н / \Delta$	$\Delta_{1n} R_н / \Delta$
K_I	$\Delta_{(a+b)(c+d)} G_н / \Delta$	$\Delta_{1n} G_н / \Delta$	$\Delta_{(a+b)(c+d)} / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	$\Delta_{1n} / \Delta_{11}$
$R_{ПЕР}$	$\Delta_{(a+b)(c+d)} / \Delta$	Δ_{1n} / Δ	$\Delta_{(a+b)(c+d)} R_н / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	$\Delta_{1n} R_н / \Delta_{11}$
$G_{ПЕР}$	$\Delta_{(a+b)(c+d)} G_н / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	$\Delta_{1n} G_н / \Delta_{11}$	$\Delta_{(a+b)(c+d)} / \Delta$	Δ_{1n} / Δ
$R_{ВХ}$	$\Delta_{(a+b)(a+b)} / \Delta$	Δ_{11} / Δ	$\Delta / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	Δ / Δ_{11}
$Y_{ВХ}$	$\Delta / \Delta_{(a+b)(a+b)}$	Δ / Δ_{11}	$\Delta_{(a+b)(a+b)} / \Delta$	Δ_{11} / Δ

Розглянемо розкладання визначника матриці вузлових провідностей за параметром провідності G_{ij} вітки, включеної між вузлами з номерами i та j. Параметр G_{ij} зі знаком «плюс» містять елементи матриці вузлових провідностей з індексами i i та j j як складник власних провідностей відповідних вузлів. Параметр G_{ij} зі знаком «мінус» як складник взаємних провідностей вузлів містять елементи матриці вузлових провідностей з індексами *i j* та *j i*. Розкриваючи визначник матриці провідностей за елементами стовпців з номерами *i* та *j*, отримаємо співвідношення

$$\Delta^{\mathbf{G}} = \Delta^{\mathbf{G}0} + G_{ij}\Delta_{ii}^{\mathbf{G}0} - G_{ij}\Delta_{ij}^{\mathbf{G}0} - G_{ij}\Delta_{ji}^{\mathbf{G}0} + G_{ij}\Delta_{jj}^{\mathbf{G}0} = \Delta^{\mathbf{G}0} + G_{ij}\Delta_{(i+j)(i+j)}^{\mathbf{G}0}, \quad (4.12)$$

де Δ^{G0} – визначник матриці вузлових провідностей, позбавленої параметра G_{ij}; $\Delta_{(i+j)(i+j)}^{\mathbf{G}0}$ – сумарне алгебраїчне доповнення цієї матриці.

Подальше перетворення формули (2.48) веде до виразу

$$\Delta^{\mathbf{G}}(G_{ij}) = \Delta^{\mathbf{G}0}(1 + G_{ij}R_{ij}^{BX}), \quad (4.13)$$

де $R_{ij}^{\text{ÂÕ}} = \Delta_{(i+j)(i+j)}^{\mathbf{G}0} / \Delta^{\mathbf{G}0}$ – вхідний (еквівалентний) опір пасивного кола при видаленій провідності G_{ij} відносно затискачів *i j* її приєднання. Оскільки величини $\Delta^{\mathbf{G}0}, R_{ij}^{\text{ÂÕ}}$ не містять параметра G_{ij}, *функціональна залежність визначника матриці вузлових провідностей від параметра провідності* G_{ij} *довільної вітки, включеної між вузлами з номерами i та j, є лінійною* відповідно до формули (4.13).

Аналогічним чином визначник матриці контурних опорів лінійно залежить від параметра опору R_{ij} вітки, що є спільною для незалежних контурів з номерами *i* та *j*:

$$\Delta^{\mathbf{R}}(R_{ij}) = \Delta^{\mathbf{R}0}(1 + R_{ij}G_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}), \quad (4.14)$$

де $\Delta^{\mathbf{R}0}$ – визначник матриці вузлових провідностей, позбавленої параметра $G_{ij}; G_{ij}^{\text{ÂÕ}} = \Delta_{(i+j)(i+j)}^{\mathbf{R}0} / \Delta^{\mathbf{R}0}$ – вхідна (еквівалентна) провідність пасивного кола при видаленому опорі R_{ij} відносно затискачів його приєднання.

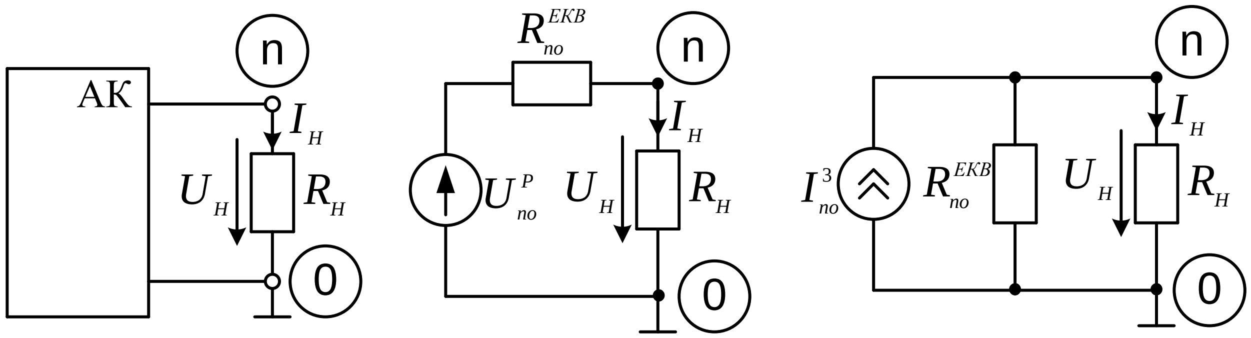
4.2. Метод еквівалентного генератора

Теорема Тевенена. Лінійний активний двополюсник відносно вихідних затискачів, до яких приєднане навантаження, еквівалентний реальному джерелу напруги, ЕРС якого дорівнює напрузі між вихідними затискачами, що утворюється при розриві вітки навантаження (скорочено напрузі розриву), а внутрішній опір дорівнює еквівалентному опору активного двополюсника відносно вихідних затискачів при видаленні усіх його джерел.

Для доведення теореми найдемо струм навантаження в схемі на рис. 4.6 а, враховуючи, що напруга навантаження U_H є різницею потенціалів вузлів з номерами *n* та 0:

$$I_H = U_H G_H = (\varphi_n - \varphi_0) G_H = \frac{\Delta_n^G G_H}{\Delta^G}, \qquad (4.15)$$

де Δ_n^G – визначник матриці вузлових провідностей, у якої *n*-ий стовпчик заміщений вектором вузлових струмів джерел активного кола. Цей визначник не містить параметра G_H, оскільки провідність навантаження ввімкнута між *n*-им вузлом та базисним і вноситься в матрицю вузлових провідностей один раз на перетині рядка та стовпчика з номером *n*.



а) б) в)

Рис. 4.6

Розкриємо визначник матриці вузлових провідностей за параметром провідності G_H, скориставшись формулою (4.13):

$$\Delta^G = \Delta^{G0}(1 + G_H R_{n0}^{\text{ÅÊÂ}}),$$

де Δ^{G0} – визначник матриці вузлових провідностей, позбавленої параметра G_H; $R_{n0}^{ЕКВ}$ – еквівалентний опір відносно затискачів *n*, 0 вмикання навантаження пасивного кола, що утворюється з активного шляхом видалення усіх джерел. Підстановка знаменника в формулу (4.15) та подальші перетворення дають наступний результат:

$$I_H = \frac{(\Delta_n^G / \Delta^{G0}) G_H}{1 + G_H R_{n0}^{\text{ÅÊÂ}}} = \frac{U_{n0}^{\text{Ð}}}{R_H + R_{n0}^{\text{ÅÊÂ}}}, \qquad (4.16)$$

де $U_{n0}^{Đ} = \Delta_n^G / \Delta^{G0}$ – напруга між затискачами n та 0 при видаленні параметра $G_{í}$ з матриці вузлових провідностей, тобто напруга, що утворюється між вихідними затискачами при розриві вітки навантаження (скорочено напруга розриву); $R_H = 1/G_H$ – опір навантаження.

Виразу (4.15) для визначення струму навантаження відповідає еквівалентна схема на рис. 4.6 б. Таким чином, довільний активний двополюсник на рис. 4.6 а викликає такий самий струм навантаження в опорі R_H, увімкнутому між вихідними затискачами, що і реальне джерело напруги на рис. 4.6 б. Це і доводить сформульовану теорему. Знаходження параметрів реального джерело ілюструє рис. 4.7. При розрахунку напруги розриву (рис. 4.7 а) видаляється опір навантаження між вихідними затискачами, але зберігаються всі внутрішні джерела енергії, при знаходженні еквівалентного опору відносно вихідних затискачів (рис. 4.7 в) видаляються як опір навантаження, так і внутрішні джерела (джерела напруги шляхом стягування, джерела струму шляхом розриву відповідних віток), від цього активний двополюсник перетворюється на пасивний.

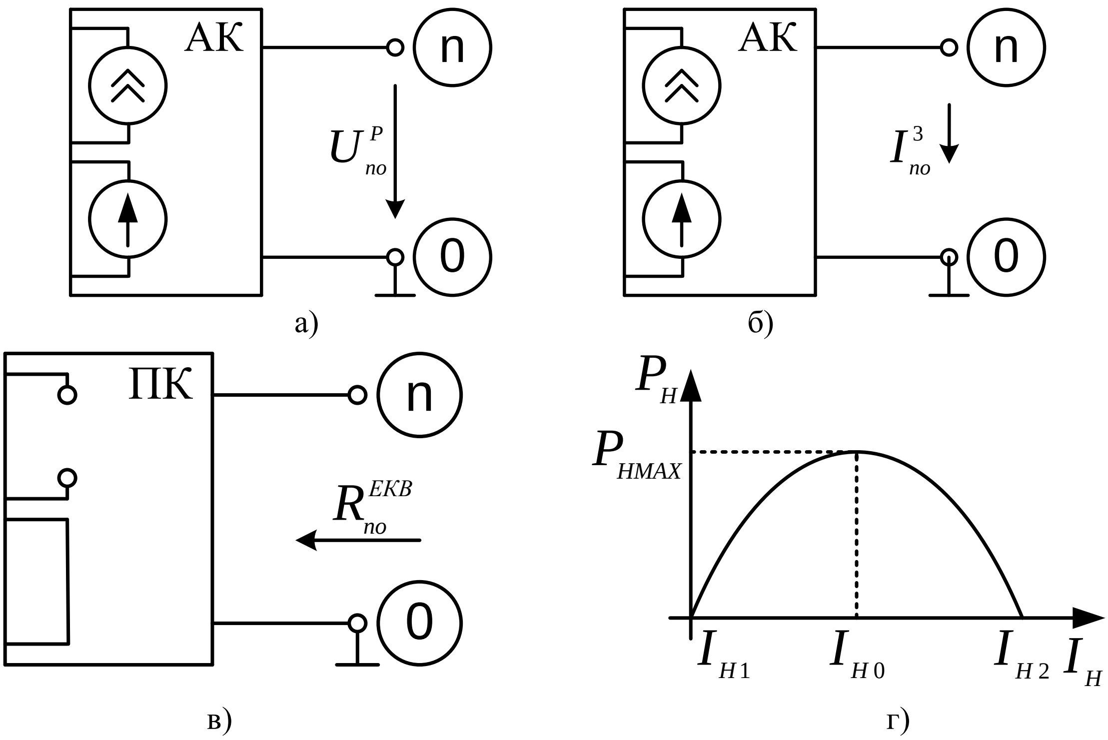


Рис. 4.7

Інший спосіб еквівалентного представлення активного двополюсника відносно вихідних затискачів дає **теорема Нортона**.

Лінійний активний двополюсник відносно вихідних затискачів, до яких приєднане навантаження, еквівалентний реальному джерелу струму, величина якого дорівнює струмові короткого замикання між вихідними затискачами (скорочено струмові замикання), а внутрішній опір дорівнює еквівалентному опору активного двополюсника відносно вихідних затискачів при видаленні усіх його джерел.

Вважатимемо, що через опір навантаження протікає єдиний контурний струм J_{nn}, тоді з використанням формули (4.14) отримаємо такий вираз для струму навантаження:

$$I_H = J_{nn} = \frac{\Delta_n^R}{\Delta^R} = \frac{\Delta_n^R}{\Delta^{R0}(1+R_H G_{n0}^{EKB})} = \frac{I_{n0}^{З}}{1+R_H G_{n0}^{EKB}} = \frac{I_{n0}^{З} R_{n0}^{EKB}}{R_{n0}^{EKB}+R_H}, \qquad (4.17)$$

де $I_{n0}^{\text{Ç}} = \Delta_n^R / \Delta^{R0} -$ струм вихідного контуру при видаленні параметра R_H з матриці контурних опорів, тобто струм між вихідними затискачами *n* та 0 при їх короткому замиканні (скорочено струм замикання); $G_{n0}^{\text{ÅÊÂ}} = 1/R_{n0}^{\text{ÅÊÂ}}$ еквівалентна провідність двополюсника відносно вихідних затискачів при видаленні усіх його джерел та досліджуваної вітки. Виразу (4.17) відповідає еквівалентна схема на рис. 4.6 в з реальним джерелом струму, що і доводить теорему. Для знаходження параметру цього джерела проводять дослід короткого замикання вихідних затискачів активного двополюсника (рис. 4.7 б), розраховуючи або вимірюючи струм замикання $I_{n0}^{\text{Ç}}$.

Порівняння виразів за формулами (4.16), (4.17) для струму навантаження дає залежність взаємного зв’язку між параметрами еквівалентних джерел:

$$U_{n0}^{\text{Ð}} = I_{n0}^{\text{Ç}} R_{n0}^{\text{ÅÊÂ}}. \qquad (4.18)$$

Такий самий результат дає еквівалентне перетворення реального джерела напруги (рис. 4.6 б) на реальне джерело струму (рис. 4.6 в). Таким чином, для знаходження струму навантаження достатньо визначити лише дві з трьох величин, що зв’язує формула (4.18).

Якщо досліджувана вітка містить ЕРС E_H кінцева формула розрахунку струму вітки модифікується до вигляду:

$$I_H = \frac{U_{n0}^{Ð} \pm E_H}{R_H + R_{n0}^{\hat{A}\hat{E}\hat{A}}}, \tag{4.19}$$

де знак плюс або мінус обирається в залежності від орієнтації ЕРС еквівалентного джерела та вітки навантаження.

На теоремах Тевенена та Нортона ґрунтується *метод еквівалентного генератора* для розрахунку струму лише однієї вітки складного електричного кола. Під еквівалентним генератором розуміють еквівалентне джерело напруги чи струму, представлені на рис. 4.6. Алгоритм застосування цього методу містить три пункти, причому в перших двох із них визначають дві з трьох величин, що зв'язує формула (4.18), а в третьому пункті розраховують струм досліджуваної вітки за формулами (4.16), (4.17) або (4.19) в залежності від знайдених в перших двох пунктах параметрів еквівалентного генератора та виду досліджуваної вітки. Оскільки досліди розриву вітки навантаження чи короткого замикання вихідних затискачів зменшують кількість незалежних контурів чи вузлів досліджуваної схеми, розрахувати параметри еквівалентного генератора простіше, ніж застосовувати МКС чи МВП для розрахунку струму однієї вітки.

Приклад 4.5. *Методом еквівалентного генератора знайти струм в опорі R_6 схеми на рис. 2.5 а.*

1. Видаливши досліджувану вітку R_6 (рис. 4.8 а), будемо знаходити напругу розриву U_{40}^{P}. Оскільки спрощена схема містить 2 незалежні контури та 4 незалежні вузли, для її розрахунку застосовуватимемо МКС. Обираємо шлях з віток $E_1 R_1$ та R_2', що з'єднує затискачі джерела струму, та переходимо до еквівалентної схеми (рис. 4.8 б) з позначеними контурними струмами. Матрична форма системи рівнянь за МКС має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_5 + R_3 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1 - E_4 + JR_1 \\ JR_2' - E_5 \end{Vmatrix}.$$

Підставивши значення параметрів елементів $E_1 = 29\hat{A};\ E_4 = 27\hat{A};\ E_5 = 36\hat{A};\ J = 2\grave{A};$ $R_1 = R_2' = R_2'' = 1\hat{I}\,\grave{\imath};\ R_3 = 3\hat{I}\,\grave{\imath};\ R_4 = 4\hat{I}\,\grave{\imath};\ R_5 = 5\hat{I}\,\grave{\imath};\ R_6 = 6\hat{I}\,\grave{\imath}$, отримаємо системи рівнянь у числовому вигляді:

$$\begin{Vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 10 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2+2 \\ 2-36 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 \\ -34 \end{Vmatrix}$$

з розв’язком

$$J_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -34 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{40-102}{80-9} = -\frac{62}{71}\,\text{À};\; J_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ -3 & -34 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{12-272}{71} = -\frac{260}{71}\,\text{À}.$$

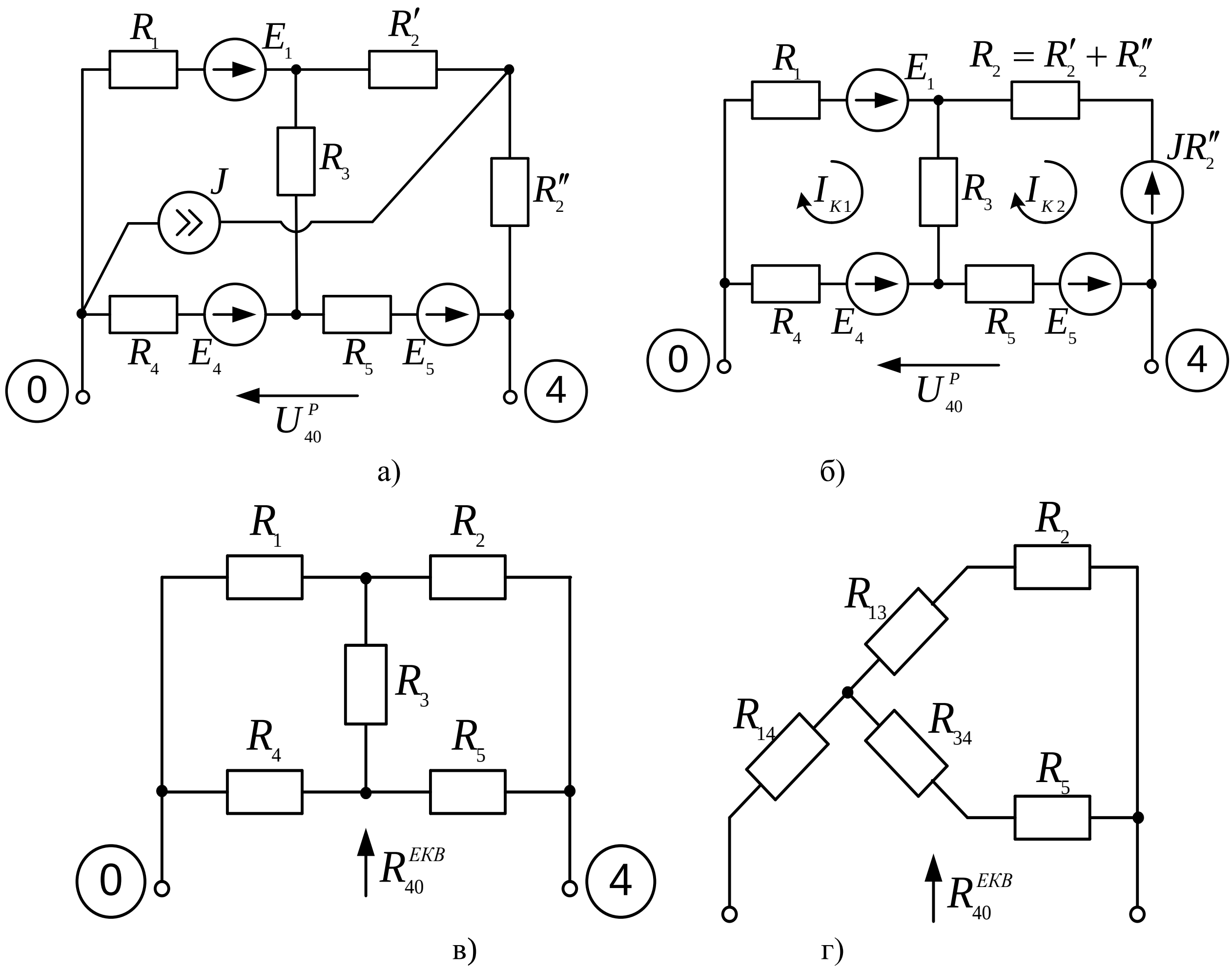


Рис. 4.8

Визначаємо числове значення напруги розриву

$$U_{40}^{Ð} = E_5 + E_4 + J_{11}R_4 + J_{22}R_5 = 36 + 27 - \frac{62\times 4 + 260\times 5}{71} = 63 - \frac{1548}{71} = \frac{2925}{71}\,\text{Â}.$$

2. Видаливши з попередньої схеми усі джерела, розрахуємо внутрішній опір генератора як еквівалентний опір пасивного двополюсника $R_{40}^{ÂÊÂ}$ (рис. 4.8 в). Оскільки отримана схема відносно затискачів увімкнення досліджуваної вітки не містить ділянок

послідовного чи паралельного з’єднання опорів, застосовуємо перетворення трикутника опорів R_1, R_3, R_4 на зірку опорів R_{13}, R_{14}, R_{34} (рис. 4.8 г) зі значеннями параметрів

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{3}{8}\text{Î ì}\ , R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{1}{2}\text{Î ì}\ , R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_1 + R_3 + R_4} = \frac{3}{2}\text{Î ì}\ .$$

Шукана величина опору

$$R_{40}^{\text{ÂÊÂ}} = R_{14} + \frac{(R_{13} + R_2)\times(R_{34} + R_5)}{R_{13} + R_2 + R_{34} + R_5} = \frac{1}{2} + \frac{(3/8 + 2)\times(3/2 + 5)}{19/8 + 13/2} = \frac{159}{71}\text{Î ì}\ .$$

3. Величина шуканого струму

$$I_6 = \frac{U_{40}^{\text{Ð}}}{R_{40}^{\text{ÂÊÂ}} + R_6} = \frac{\frac{2925}{71}}{\frac{159}{71} + 6} = \frac{2925}{159 + 6\times 71} = 5\text{À}$$

збігається з отриманим раніше значенням.

4.3. Передача максимальної енергії від активного двополюсника до навантаження

При підключенні резистивного навантаження з опором R до активного двополюсника (рис. 4.6 а) у вихідному колі протікатиме струм навантаження величиною I_H. Якщо скористатися схемним еквівалентом Тевенена для еквівалентного генератора активного двополюсника (рис. 4.6 б) для струму та напруги навантаження матимемо вирази:

$$\begin{aligned} I_H &= U_{ab}^{P} \big/ (R_{ab}^{EKB} + R_H); \\ U_H &= U_{ab}^{P} - I_H R_{ab}^{EKB}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

де $U_{ab}^{\text{Ð}}$ – напруга розриву; R_{ab}^{EKB} – еквівалентний опір активного двополюсника.

Тоді потужність навантаження визначатиметься виразом:

$$P_H = U_H I_H = U_{ab}^{P} I_H - I_H^2 R_{ab}^{EKB}.$$

Графік залежності потужності навантаження від струму навантаження є параболою з оберненою догори вершиною (рис. 4.7г), що пересікає горизонтальну вісь в точках $I_{H1} = 0$ та $I_{H2} = U_{ab}^{\text{Ð}} \big/ R_{ab}^{EKB}$. Абсциса точки максимуму - оптимальне значення струму навантаження визначається напівсумою наведених значень:

$$I_{H0} = U_{ab}^{P} \big/ 2R_{ab}^{EKB}. \qquad (4.21)$$

Із порівняння виразів (4.20) та (4.21) доходимо висновку, що оптимальне значення струму навантаження має місце за умови

$$R_H = R_{ab}^{EKB}, \qquad (4.22)$$

при цьому максимальне значення потужності навантаження

$$P_{HMAX} = (U_{ab}^{P})^2 \big/ 4R_{ab}^{EKB} = U_{ab}^{P} I_{ab}^{З} \big/ 4. \qquad (4.23)$$

Забезпечення виконання умови (4.22) називається *узгодженням джерела з навантаженням.*

У загальному випадку потужність активного двополюсника визначається виразом:

$$P_{ÀÄ} = U_{ab}^{Ð} I_H, \qquad (4.24)$$

при цьому коефіцієнт корисної дії системи у вигляді навантаженого активного двополюсника:

$$\eta = P_H / P_{АД} = U_H \big/ U_{ab}^{P} = R_H \big/ (R_H + R_{ab}^{EKB}).$$

Для джерела, узгодженого з навантаженням, тобто при виконанні умови (4.22) коефіцієнт корисної дії складає $\eta = 0,5$. В системах передачі енергії від потужних електростанцій таке низьке значення ККД неприпустиме, тому забезпечують виконання умови $R_{ab}^{EKB} << R_{Í}$, при цьому потужність короткого замикання активного двополюсника значно перевищує потужність навантаження. В інформаційних системах з метою забезпечення максимальної потужності сигналу первинного датчика, а також при відборі енергії відновлюваних джерел з метою її максимізації забезпечують режим узгодженого навантаження за формулою (4.22), допускаючи значення ККД системи 50%.

Приклад 4.6. *Знайти максимальне значення потужності, що може бути отримане в резисторі діагоналі мостової схеми на рис. 4.2 при живленні її від ідеального джерела напруги.*

Визначення максимального значення потужності зводиться до розрахунку двох з трьох величин формули (4.18). Напруга розриву набуває значення

$$U_{23}^{Ð} = I_{20}^{Ð} R_{20} - I_{30}^{Ð} R_{30} = \frac{ER_{20}}{R_{20}+R_{12}} - \frac{ER_{30}}{R_{30}+R_{13}} = \frac{E(R_{20}R_{13} - R_{30}R_{12})}{(R_{20}+R_{12})(R_{30}+R_{13})}.$$

Видаливши зі схеми джерело з замиканням точок його приєднання, визначаємо внутрішній опір еквівалентного джерела:

$$R_{23}^{ÂÊÂ} = \frac{R_{20}R_{12}}{R_{20}+R_{12}} + \frac{R_{30}R_{13}}{R_{30}+R_{13}} = \frac{R_{20}R_{12}R_{30} + R_{20}R_{12}R_{13} + R_{30}R_{13}R_{20} + R_{30}R_{13}R_{12}}{(R_{20}+R_{12})(R_{30}+R_{13})} =$$

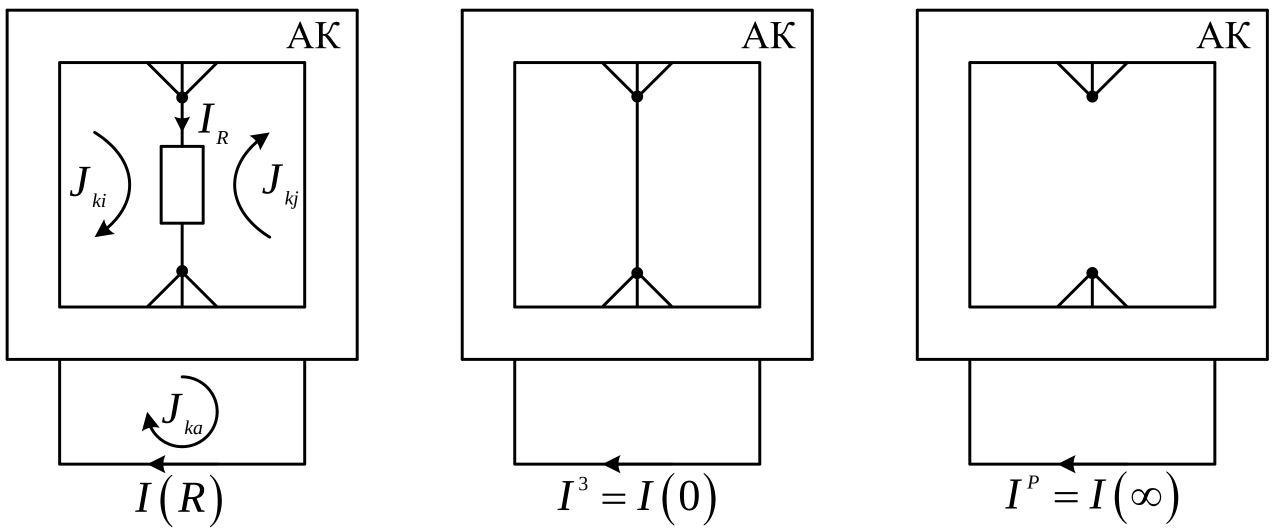
$$= \frac{R_{12}R_{13}R_{20}R_{30}(G_{12}+G_{13}+G_{20}+G_{30})}{(R_{20}+R_{12})(R_{30}+R_{13})}.$$

Шукана величина максимальної потужності

$$P_{HMAX} = \frac{(U_{ab}^{Ð})^2}{4R_{ab}^{EKB}} = \frac{E^2(R_{20}R_{13} - R_{30}R_{12})^2 G_{12}G_{13}G_{20}G_{30}}{4(R_{20}+R_{12})(R_{30}+R_{13})(G_{12}+G_{13}+G_{20}+G_{30})}.$$

4.4. Залежність струму (напруги) вітки від параметру іншої вітки

Виведемо розрахункове співвідношення для залежності струму *I* деякої вітки активного кола, що створюється єдиним контурним струмом $J_{ka} = I$, від опору *R* іншої вітки, яку обтікають інші контурні струми J_{ki} та J_{kj} (рис. 4.9 а).



а) б) в)

Рис. 4.9

Використавши правило Крамера для визначення контурного струму J_{ka} та розклавши визначники за параметром *R* відповідно до формули (4.14), отримаємо співвідношення шуканої залежності:

$$I(R) = J_{ka} = \frac{\Delta_{(a)}^{R}}{\Delta^{R}} = \frac{\Delta_{(a)}^{R0} + R\Delta_{(a)(i+j)(i+j)}^{R0}}{\Delta^{R0}(1 + RG_{ij}^{\text{ÅÊÂ}})}. \qquad (4.25)$$

Дослідимо функцію за формулою (4.25) при двох крайніх значеннях аргументу. При $R = 0$ маємо режим короткого замикання затискачів, до яких приєднаний опір R (рис. 4.9 б), і досліджуваний струм приймає значення:

$$I(0) = I^{\text{Ç}} = \frac{\Delta_{(a)}^{R0}}{\Delta^{R0}}.$$

При $R = \infty$ маємо режим розриву затискачів, до яких приєднаний опір R (рис. 4.9 в), і досліджуваний струм приймає значення:

$$I(\infty) = I^{\text{Ð}} = \frac{\Delta_{(a)(i+j)(i+j)}^{R0}}{\Delta^{R0} G_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}} = \frac{\Delta_{(a)(i+j)(i+j)}^{R0}}{\Delta_{(i+j)(i+j)}^{R0}}.$$

З урахуванням отриманих значень струмів перетворимо формулу (4.25).

$$I(R) = \frac{\Delta_{(a)}^{R0} / \Delta^{R0} + R\Delta_{(a)(i+j)(i+j)}^{R0} / \Delta^{R0}}{1 + RG_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}} =$$

$$= \frac{I^{\text{Ç}} + R\dfrac{\Delta_{(a)(i+j)(i+j)}^{R0}}{\Delta_{(i+j)(i+j)}^{R0}} \times \dfrac{\Delta_{(i+j)(i+j)}^{R0}}{\Delta^{R0}}}{1 + RG_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}} = \frac{I^{\text{Ç}} + RI^{\text{Ð}} G_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}}{1 + RG_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}} = \frac{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}} I^{\text{Ç}} + RI^{\text{Ð}}}{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}} + R}. \qquad (4.26)$$

Таким чином, *функціональна залежність струму даної вітки активного кола від опору іншої вітки є зваженою сумою значень цього струму в режимах розриву й замикання затискачів приєднання опору, вагові коефіцієнти якої пропорційні опору вітки та еквівалентному опору кола відносно затискачів приєднання опору*.

Відзначимо, що основна розрахункова формула (4.17) методу еквівалентного генератора є окремим випадком залежності за формулою (4.26), коли досліджується вплив опору вітки на струм цієї ж самої вітки, і режим розриву приводить до нульового значення струму розриву $I^{\text{Ð}}$.

Приклад 4.7. *Дослідити залежність струму в діагоналі мостової схеми на рис. 4.2 від опору R_{13} за наявності вхідного джерела струму з параметром J, якщо всі інші провідності віток мають одиничні значення.*

Для здійснення розрахунків за формулою (4.26) замикаємо затискачі 1, 3 (рис. 4.10 а) та визначаємо значення шуканого струму в режимі замикання. Опори з провідностями

G_{12}, G_{23} з'єднані паралельно та разом з резистором провідністю G_{20} утворюють одну з віток дільника вхідного струму. Провідність цієї вітки

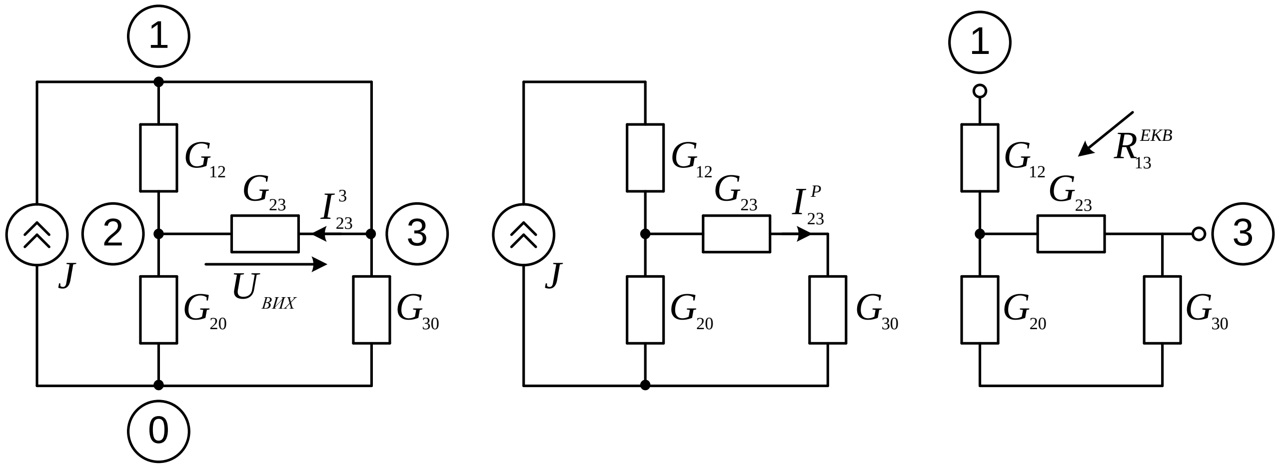
$$G_{120} = \frac{1}{R_{20} + \dfrac{1}{G_{12} + G_{23}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1+1}} = \frac{2}{3} См.$$

Другу вітку дільника вхідного струму утворює резистор провідністю G_{30}. Спільний струм опорів з провідностями G_{12}, G_{23}

$$I_{20} = J \frac{G_{120}}{G_{120} + G_{30}} = J \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{2}{3} + 1} = \frac{2}{5} J = 0.4J.$$

Шуканий струм режиму замикання визначаємо з урахуванням його орієнтації відносно вихідних затискачів:

$$I_{23}^{З} = -I_{20} \frac{G_{23}}{G_{23} + G_{12}} = -J \frac{0.4 \times 1}{1+1} = -0.2J.$$



а) б) в)

Рис. 4.10

Далі реалізуємо режим розриву шляхом видалення провідності G_{13} (рис. 4.10 б) та за правилом чужого опору знаходимо значення струму розриву:

$$I_{23}^{P} = J \frac{R_{20}}{R_{20} + R_{30} + R_{23}} = J / 3.$$

Для знаходження еквівалентного опору кола відносно затискачів 1, 3 з попередньої схеми видаляємо шляхом розриву єдине джерело струму (рис. 4.10 в) та встановлюємо, що

$$R_{13}^{ЕКВ} = \frac{R_{23}(R_{20} + R_{30})}{R_{20} + R_{30} + R_{23}} + R_{12} = \frac{5}{3} Ом.$$

Шукана залежність має вигляд:

$$I_{23}(R_{13})=\frac{R_{13}^{EKB}I_{23}^{З}+R_{13}I_{23}^{P}}{R_{13}^{EKB}+R_{13}}=J\,\frac{\dfrac{R_{13}}{3}-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{5}{3}}{\dfrac{5}{3}+R_{13}}=J\,\frac{R_{13}-1}{5+3R_{13}}.$$

Як і слід було очікувати, при $R_{13}=1Ом$ струм діагоналі мостової схеми дорівнює нулю, оскільки виконується умова врівноважування цієї схеми при заданих параметрах елементів.

За аналогією з формулою (4.26) побудуємо формулу залежності напруги U деякої вітки активного кола від опору R іншої вітки, ввімкнутою між вузлами з номерами i та j, з таким розрахунком, щоб забезпечувалися умови $U(0)=U^{\text{Ç}};U(\infty)=U^{\text{Ð}}$:

$$U(R)=\frac{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}U^{\text{Ç}}+RU^{\text{Ð}}}{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}+R}. \tag{4.27}$$

Якщо шукана напруга вимірюється на затискачах єдиного джерела струму кола, то всі напруги в формулі (4.27) будуть пропорційні параметру цього джерела, а значення цих напруг, ділені на параметр джерела, будуть визначати значення вхідного опору пасивного кола:

$$R_{\text{ÂÕ}}(R)=\frac{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}R_{\text{ÂÕ}}^{\text{Ç}}+RR_{\text{ÂÕ}}^{\text{Ð}}}{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}+R}. \tag{4.28}$$

Приклад 4.8. *Розрахувати за формулою (4.28) з резистором R_3 в якості аргументу R еквівалентний опір генератора з прикладу 4.5, розглядаючи його як вхідний для кола на рис. 4.8 в.*

Знаходимо складники формули (4.28) для даного випадку:

$$\frac{R_3}{R_{ij}^{\text{ÅÊÂ}}}=\frac{R_3}{R_1+R_4}+\frac{R_3}{R_2+R_5}=\frac{3}{5}+\frac{3}{7}=\frac{21+15}{35}=\frac{36}{35};$$

$$R_{BX}^{\text{Ç}}=\frac{R_1R_4}{R_1+R_4}+\frac{R_2R_5}{R_2+R_5}=\frac{4}{5}+\frac{10}{7}=\frac{78}{35};$$

$$R_{BX}^{\text{Ð}}=\frac{(R_1+R_2)\times(R_4+R_5)}{R_1+R_2+R_4+R_5}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}.$$

Величина вхідного опору

$$R_{BX}(R_3)=\frac{R_{BX}^{\text{Ç}}+R_{BX}^{\text{Ð}}R_3/R^{(3)}}{1+R_3/R^{(3)}}=\frac{\dfrac{78}{35}+\dfrac{9}{4}\times\dfrac{36}{35}}{1+\dfrac{36}{35}}=\frac{78+81}{71}=\frac{159}{71},$$

що збігається з попереднім результатом.

5. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

5.1. Принцип дуальності

Принцип дуальності встановлює парну відповідність в співвідношеннях, величинах, параметрах, режимах та поняттях теорії електричних кіл.

Дві еквівалентні форми запису (2.3) закону Ома для резистора дозволяють встановити дуальність величин напруги та струму, а також таких параметрів резистора як опір та провідність. Перший та другий закони Кірхгофа є дуальними співвідношеннями, що встановлюють нульові значення алгебраїчних сум струмів у вузлі та напруг у контурі, отже, вони підтверджують дуальність величин напруги та струму, а також обґрунтовують дуальність топологічних понять контуру та вузла (перетину). Іншими видами дуальних топологічних понять є послідовне та паралельне з'єднання, в чому неважко переконатися, співставляючи розрахункові формули (1.15) - (1.17) послідовного та паралельного з'єднань резисторів. Схемні еквіваленти Тевенена та Нортона реального джерела підтверджують дуальність параметрів резистора опір та провідність, а також встановлюють дуальність ідеальних джерел струму та напруги. З урахуванням наведених дуальних пар контур-вузол, струм-напруга, опір-провідність дуальними також є співвідношення у вигляді основних методів аналізу електричних кіл МКС та МВП.

Нарешті, для ілюстрації дуальності режимів електричного кола знайдемо напругу навантаження активного двополюсника, якщо струм навантаження задається формулою (4.17):

$$U_H = I_H R_H = \frac{I_{n0}^{З} R_{n0}^{ЕКВ} R_H}{R_{n0}^{ЕКВ} + R_H} = \frac{I_{n0}^{З}}{G_{n0}^{ЕКВ} + G_H},$$

де $G_{n0}^{ЕКВ} = 1/R_{n0}^{ЕКВ}$ – еквівалентна провідність двополюсника та $G_H = 1/R_H$ – провідність навантаження. Із порівняння цієї формули з виразом (4.16) випливають вже відомі парні відповідності $U_H \leftrightarrow I_H; R_H \leftrightarrow G_H; G_{n0}^{ЕКВ} \leftrightarrow R_{n0}^{ЕКВ}$, а також дуальність напруги розриву U_{n0}^{P} та струму замикання I^{3}_{n0}. Звідси випливає дуальність режимів електричного кола розрив та замикання.

Практична цінність принципу дуальності полягає в тому, що він дозволяє поширити результати аналізу одних кіл на дуальні поняття цих самих кіл та/або на аналогічні поняття дуальних за топологією кіл.

Приклад 5.1. *Спираючись на принцип дуальності, обґрунтувати формули схемних функцій на основі матриці контурних опорів, не доведені у розділі 4.*

Коефіцієнт передачі за струмом на основі матриці контурних опорів має дуальну схемну функцію - коефіцієнт передачі за напругою на основі матриці вузлових провідностей, що підтверджується доведеними у розділі 4 виразами $K_I = \Delta^R_{(a+b)(c+d)} / \Delta^R_{(a+b)(a+b)}; K_U = \Delta^G_{(a+b)(c+d)} / \Delta^G_{(a+b)(a+b)}$. Отже, для отримання виразу для коефіцієнта передачі за напругою на основі матриці контурних опорів потрібно у виразі для дуального аналога $K_I = \Delta^G_{(a+b)(c+d)} G_H / \Delta^G$ замінити позначення *I* на *U* в коефіцієнті передачі, *G* замінити на *R* в позначеннях визначників та алгебраїчних доповнень матриць, провідність навантаження G_H замінити на дуальний параметр опір навантаження R_H. В результаті отримаємо $K_U = \Delta^R_{(a+b)(c+d)} R_H / \Delta^R$. Легко переконатися в тому, що всі інші схемні функції на основі матриці контурних опорів можуть бути отримані з виразів для своїх дуальних аналогів на основі матриці вузлових провідностей (опори з провідностей та навпаки) з використаннях наведених правил заміни.

5.2. Принцип суперпозиції (накладання)

Принцип суперпозиції – базовий принцип для систем, описуваних лінійними рівняннями, який полягає в тому, що реакція такої системи на дію декількох впливів може бути знайдена накладанням (додаванням) реакцій, зумовлених кожним впливом зокрема. Під впливами в електричних колах розуміють дію активних елементів – джерел напруги та струму, під реакціями – набуті значення струмів чи напруг певних ділянок кола.

Нехай лінійне електричне коло постійного струму містить n_E ідеальних джерел напруги, n_J ідеальних джерел струму, описується системою рівнянь за МКС вигляду (2.3), а струм певної ділянки кола *I* створюється *m*–им контурним струмом J_{Km}. Тоді за правилом Крамера

$$I = J_{Km} = \frac{1}{\Delta^R} \sum_{i=1}^{k_2} \Delta_{mi}^R E_{Ki}.$$

Розкривши всі контурні ЕРС за параметрами усіх джерел, з урахуванням позначень табл. 4.1, матимемо лінійну залежність шуканого струму від параметрів джерел:

$$I = \sum_{i=1}^{n_J} K_{Ii} J_i + \sum_{j=1}^{n_E} G_{Пj} E_j. \quad (5.1)$$

Струм заданої ділянки кола, викликаний дією лише одного джерела з їх сукупності у правій частини формули (5.1), називають частковим. Отже, *принцип суперпозиції для електричних кіл* полягає в тому, що *струм заданої ділянки кола дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів, викликаних кожним джерелом окремо*.

Саме на цьому принципі ґрунтується розрахунок електричних кіл *методом накладання*. Алгоритм його застосування полягає у наступному.

1. Утворюють $n = n_E + n_J$ часткових схем за загальною кількістю джерел первісно заданого кола, залишаючи по черзі в кожній з них лише одне джерело, а усі інші джерела вилучають способом, що враховує їх внутрішній опір. Тобто затискачі, між якими знаходилося джерело ЕРС, замикають, оскільки внутрішній опір такого джерела нульовий, а затискачі з джерелом струму – розмикають, оскільки його внутрішня провідність нульова.

2. Розраховують n часткових струмів усіх часткових схем, застосовуючи методи розрахунку кіл з одним джерелом.

3. Струм заданої ділянки кола знаходять шляхом алгебраїчного додавання усіх часткових струмів з урахуванням їх напрямів.

Приклад 5.2. *Розрахувати струми електричного кола на рис. 1.9 а методом накладання.*

1. За кількістю джерел первісної схеми утворюємо дві часткові схеми (рис. 5.1).

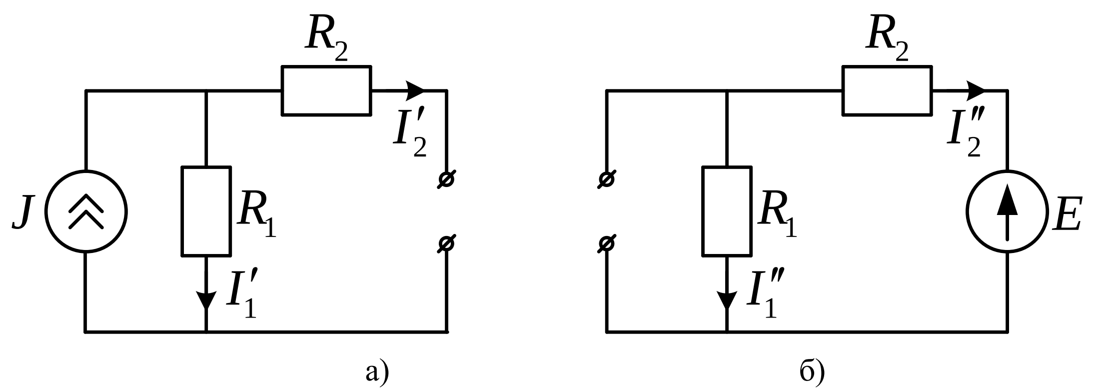


Рис. 5. 1

2. Струми часткової схеми з джерелом струму (рис. 1.5 а) знаходимо за правилом чужого опору:

$$I_1^{'} = J\frac{R_2}{R_1+R_2} = 10\frac{2}{3+2} = 4(\text{А});$$

$$I_2^{'} = J - I_1^{'} = 10 - 4 = 6(\text{А}).$$

Резистори часткової схеми з джерелом напруги увімкнені (рис. 1.5 б) послідовно, тому їх струми однакові:

$$I_1^{''} = I_2^{''} = \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{15}{2+3} = 3(\text{А}).$$

3. Струми первісно заданого кола знаходимо додаванням знайдених часткових струмів з урахуванням їх напрямів. Часткові струми першого резистора напрямлені однаково, в той же бік спрямовуємо його загальний струм (рис. 1.9 а) та знаходимо його величину

$$I_1 = I_1^{'} + I_1^{''} = 4 + 3 = 7(\text{А}).$$

Часткові струми другого резистора напрямлені протилежно, орієнтуємо загальний струм за напрямом більшого часткового струму (рис. 1.9 а) та знаходимо його величину

$$I_2 = I_2^{'} - I_2^{''} = 6 - 3 = 3(\text{А}).$$

Отримані значення збігаються з розрахованими у прикладі 1.2 із застосуванням еквівалентного перетворення джерел.

Зауважимо, що *принцип накладання не можна застосовувати для розрахунку потужностей,* оскільки залежність потужності резистора від його струму є квадратичною, а не лінійною.

Так, наприклад, для першого резистора розглянутого прикладу

$$P_{R1} = I_1^2 R_1 = (I_1' + I_1'')^2 R_1 \neq I_1'^2 R_1 + I_1''^2 R_1.$$

У випадку, якщо лінійне коло містить лише одне джерело, то з формули (5.1) випливає, що усі струми цього кола будуть пропорційними параметру єдиного джерела. На цій властивості базується *метод пропорційного перерахунку* (пропорційних величин; подібності; одиничного струму), що застосовується для електричних кіл з одним джерелом та послідовно-паралельним з'єднанням резисторів.

Алгоритм його застосування є наступним.

1. У найвіддаленішій від джерела (входу кола) вітці задаємося одиничною величиною струму 1 A.

2. Спираючись на це значення, та використовуючи закони Ома та Кірхгофа, знаходимо проміжні розрахункові величини струмів усіх віток та напруг. Оскільки ці значення, як правило, не співпадають з реальними струмами та напругами електричного кола, будемо відрізняти їх штрихом. Завершується етап розрахунком параметру єдиного джерела, наприклад, напруги E', що забезпечує зазначені штриховані значення струмів та напруг.

3. У загальному випадку знайдене в п. 2 розрахункове значення ЕРС E' не буде дорівнювати заданому значенню ЕРС E вхідного джерела. Тому визначається коефіцієнт перерахунку (пропорційності):

$$K = E/E'.$$

4. Знаходимо істинні значення струмів та напруг, помноживши проміжні значення струмів та напруги на знайдений коефіцієнт K:

$$I_j = KI'_j;\ U'_i = KU'_i.$$

Приклад 5.3. *Розрахувати струми електричного кола на рис. 1.11а методом пропорційного перерахунку.*

1. У найвіддаленішій від джерела вітці з резистором R_3 задаємося одиничною величиною струму $I'_3 = 1\,A$.

2. За законом Ома розрахункове значення напруги на затискачах резистора R_3

$$U'_3 = R_3 I'_3 = 3\times 1 = 3\ B.$$

Оскільки резистори R_2, R_3 з'єднані паралельно, $U'_2 = U'_3 = 3B.$ Тоді за законом Ома

$$I'_2 = U'_2/R_2 = 3/2 = 1.5\ A.$$

За першим законом Кірхгофа

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = 1.5 + 1 = 2.5A..$$

За другим законом Кірхгофа

$$E' = I_1' R_1 + U_2' = 2.5 \times 1 + 3 = 5.5B..$$

3. Визначаємо коефіцієнт перерахунку:

$$K = E/E' = 11/5.5 = 2.$$

4. Знаходимо істинні значення струмів, помноживши їх проміжні значення на знайдений коефіцієнт K:

$$I_1 = KI_1' = 2 \times 2.5 = 5(A); I_2 = KI_2' = 2 \times 1.5 = 3(A);\ I_3 = KI_3' = 2 \times 1 = 2(A).$$

Отримані значення струмів повністю відповідають розрахованим у прикладі 1.3.

З принципу суперпозиції випливає також лінійна взаємозалежність довільної пари струмів віток, що не містять джерел струму, при зміні параметру лише одного з джерел. Дійсно, з формули (5.1) випливає, що кожен з двох різних струмів віток I_l та I_k лінійно залежать від параметру, наприклад, E_m одного з джерел напруги:

$$I_l = J_l + G_{ml} E_m;\ I_k = J_k + G_{mk} E_m,$$

де константи J_l, J_k позначають суми часткових струмів, викликаних незмінюваними джерелами, а константи G_{mk}, G_{mk}- передатні провідності джерела зі змінюваним параметром до досліджуваних віток. Виключивши з останньої системи рівнянь змінюваний параметр E_m, матимемо лінійну залежність між струмами, що розглядаються:

$$I_l = B + CI_k, \qquad (5.2)$$

де $B = A_k - A_l \dfrac{G_{mk}}{G_{ml}};\quad C = \dfrac{G_{mk}}{G_{ml}}.$

Використовуючи формулу (4.26), доведемо, що лінійна залежність між довільною парою струмів також зберігається при зміні параметру одного з резисторів кола. Дійсно, пара струмів, наприклад, I_l, I_k залежать від параметру R резистора, увімкненого між затискачами i та j, відповідно до системи рівнянь:

$$I_l = \frac{R_{ij}^{EKB} I_l^{З} + RI_l^{P}}{R_{ij}^{EKB} + R};\ I_k = \frac{R_{ij}^{EKB} I_k^{З} + RI_k^{P}}{R_{ij}^{EKB} + R}.$$

Виразивши з другого рівняння цієї системи змінюваний параметр $R = R_{ij}^{ЕКВ}(I_k^З - I_k)/(I_k - I_k^P)$ та підставивши його в перше рівняння, матимемо лінійну залежність за формулою (5.2) між струмами, що розглядаються, при

$$B = \frac{I_l^З - I_l^P}{I_k^З - I_k^P};\; C = \frac{I_l^P I_k^З - I_l^З I_k^P}{I_k^З - I_k^P}.$$

Невідомі коефіцієнти у лінійному співвідношенні (5.2) у загальному випадку можна визначити розрахунковим або дослідним шляхом за двома фіксованими значеннями змінюваного параметру. При зміні параметру резистора доцільно аналізувати режими його розриву та замикання.

Приклад 5.4. *Знайти коефіцієнти лінійної залежності за формулою (5.2) між струмами резисторів електричного кола на рис. 1.9.а при зміні параметру резистора* R_2.

Для даної задачі шукана лінійна залежність має вигляд:

$$I_1 = B + CI_2.$$

1. В режимі розриву R_2

$$I_1 = J; I_2 = 0.$$

При підстановці цих значень в формулу шуканої залежності встановлюємо, що $B = J$.

2. В режимі короткого замикання R_2 напруга резистора R_1 дорівнює E, тому

$$I_1 = I_2 = E/R_1.$$

При підстановці цих значень в формулу шуканої залежності маємо рівняння відносно параметру C:

$$\frac{E}{R_1} = J + C \times \frac{E}{R_1},$$

звідки $C = 1 - JR_1/E$.

Таким чином, шукана лінійна залежність має вигляд:

$$I_1 = J + (1 - JR_1/E) \times I_2.$$

Зокрема, при зазначених у прикладі 2.2 параметрах та $I_2 = 3A$

$$I_1 = 10 + (1 - 10 \times 3/15) \times 3 = 7A,$$

що збігається з попереднім розв’язком.

5.3. Принцип взаємності (оборотності)

Принцип взаємності визначає взаємні зв'язки між струмами та напругами певних ділянок пасивного електричного кола при впливі одного джерела, а також симетричні співвідношення між параметрами певних електромагнітних явищ, що будуть розглянуті в подальших розділах.

Принцип взаємності для струмів доведемо в формі наступної теореми.

Теорема. Для будь-якого пасивного лінійного кола струм I_m $m-$ої вітки, викликаний джерелом напруги з ЕРС E_k $k-$тої вітки (рис. 5.3 а), буде дорівнювати струмові I'_k $k-$тої вітки, що викликало це ж саме джерело, встановлене в $m-$ту вітку (рис. 5.3 б, $E_m = E_k$).

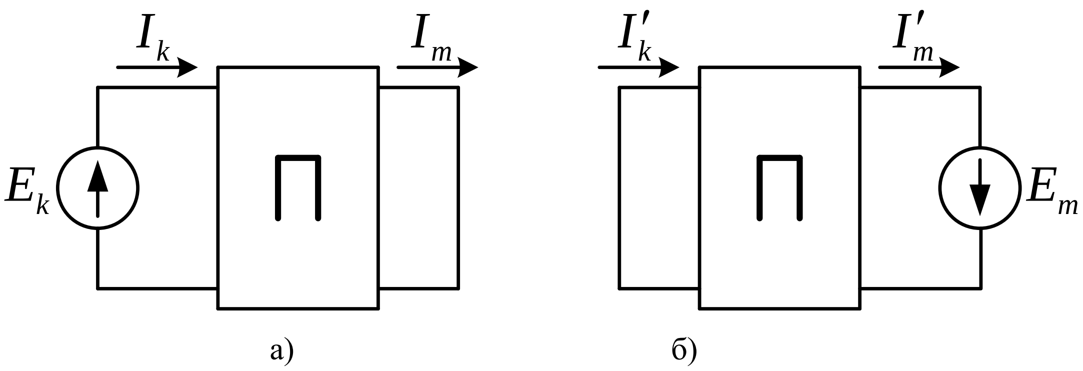


Рис. 5.3

Для доведення теореми спрямуємо контурні струми зовнішніх контурів схем на рис. 5.3 за напрямками позначених струмів віток. Тоді, визначивши відповідні контурні струми за правилом Крамера та розкривши визначники у чисельниках за єдиним ненульовим елементом відповідного стовпчика, матимемо співвідношення для досліджуваних струмів:

$$I_m = \frac{\Delta_m^R}{\Delta^R} = \frac{\Delta_{km}^R E_k}{\Delta^R}; \;\; I'_k = \frac{\Delta_k^R}{\Delta^R} = \frac{\Delta_{mk}^R E_m}{\Delta^R}. \qquad (5.3)$$

Оскільки за умовою $E_k = E_m$, а $\Delta_{km}^R = \Delta_{mk}^R$ через симетричність матриці контурних опорів $\mathbf{R}$ відносно головної діагоналі, то $I_m = I'_k$, що і треба було довести.

Таким чином, *принцип взаємності для струмів* полягає в наступному: *якщо в пасивному лінійному колі джерело напруги, встановлене в першу* *вітку, викликає певний струм у другій вітці, то при його встановленні в другу вітку воно викличе такий самий струм в першій вітці.*

Кола, для яких виконується принцип взаємності, називаються *оборотними*. У випадку не виконання принципу взаємності (наприклад, в нелінійних колах) вони називаються *необоротними*. При практичному застосуванні принципу дуальності для струмів важливо дотримуватись взаємної відповідності напрямів струмів та ЕРС, продемонстрованої на рис. 5.3.

Приклад 5.5. *Проілюструвати принцип взаємності для струмів на прикладі струму I_3 схеми на рис. 1.11 а.*

У прикладі 1.3 для схеми на рис. 1.11 а знайдене значення струму $I_3 = 2A$, викликане вхідним джерелом напруги з ЕРС $E = 11\,B$. Відповідно до принципу взаємності це ж саме джерело, встановлене з дотриманням полярності у вітку, де протікав зазначений струм, має викликати таке ж саме значення струму між вхідними затискачами (рис. 5.4).

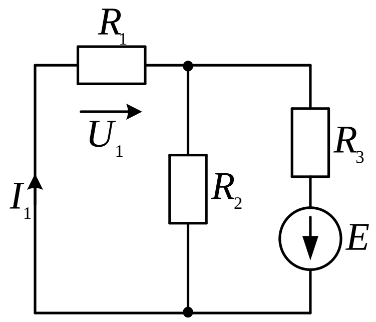


Рис. 5.4

У новоутвореній схемі резистори R_1, R_2 з'єднані паралельно і разом з резистором R_3 утворюють дільник напруги джерела, тому

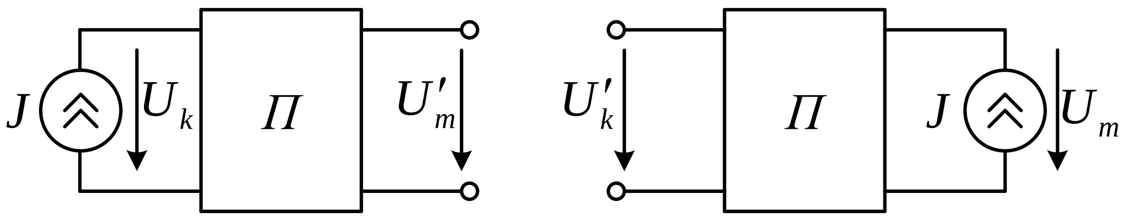
$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{ER_{12}}{R_1(R_{12}+R_3)} = \frac{ER_2}{(R_1+R_2)\left(\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3\right)} = \frac{ER_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} = \frac{11\times 2}{1\times 2+3\times 2+1\times 3} = 2\ A,$$

що і потрібно було проілюструвати.

Застосуємо до виразів (5.3) принцип дуальності, замінивши досліджувані струми на напруги, визначники та алгебраїчні доповнення матриці контурних опорів на визначники та алгебраїчні доповнення матриці матриці вузлових провідностей, джерела напруги на джерела струму з однаковим параметром *J*. В результаті отримаємо співвідношення для напруг:

$$U_m = \frac{\Delta_{km}^G J}{\Delta^G} = \frac{\Delta_{mk}^G J}{\Delta^G} = U'_k. \qquad (5.4)$$

Їм відповідають оборотні кола на рис. 5.5, що ілюструють *принцип взаємності для напруг*: *якщо в пасивному лінійному колі джерело струму, встановлене в першу ділянку, викликає певну напругу в другій ділянці, то при встановленні цього джерела в другу ділянку воно викличе таку саму напругу в першій ділянці.* Для виконання принцип дуальності для напруг так само важливо дотримуватись узгодження напрямів напруг та струмів джерела, як показано на рис. 5.5.



а) б)

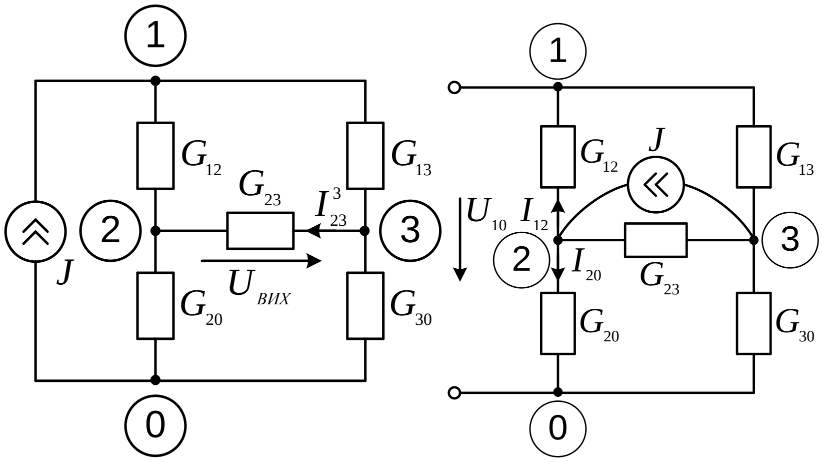
Рис. 5.5

Приклад 5.6. *Проілюструвати принцип взаємності для напруг, викликаних джерелами струмів, на прикладі залежності вихідної напруги від параметра джерела струму в схемі на рис. 3.2а, якщо її параметри такі самі, як у прикладі 4.7.*

У прикладі 4.79 отримана залежність вихідного струму схеми на рис. 5.6 а від параметра джерела струму та опору R_{13} :

$$I_{23} = J\,\frac{R_{13} - 1}{5 + 3R_{13}}.$$

З урахуванням одиничних значень опорів резисторів, окрім R_{13}, *залежність вихідної напруги від параметра джерела струму та опору* R_{13} *буде такою самою.*



а) б)

Рис. 5.6

В новоутвореній схемі (рис. 5.6 б) джерело струму ввімкнемо між вихідними затискачами та знайдемо залежність викликаної ним напруги між вхідними затискачами від параметра джерела струму та опору R_{13}. В цій схемі маємо дільник струму джерела, що складається з трьох резистивних віток, струм в кожній з них може бути знайдений за формулою (1.18), а шукана напруга утворюється падіннями напруг на резисторах з одиничними провідностями:

$$U_{10} = I_{20}/G_{20} - I_{12}/G_{12} = J\frac{\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+R_{13}}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1+R_{13}} + \frac{1}{1+1}} = J\frac{1+R_{13}-2}{2\times(1+R_{13})+2+1+R_{13}} = J\frac{R_{13}-1}{3R_{13}+5}.$$

Як бачимо, в даному прикладі принцип взаємності підтверджується на рівні функціональних залежностей напруг від опору одного з резисторів досліджуваного кола.

Принцип взаємності також діє відносно величин коефіцієнтів передачі за напругою від входу до виходу та за струмом в зворотному напрямі пасивного кола. Увімкнемо до вхідних затискачів пасивного кола (рис. 5.7 а) ідеальне джерело напруги з параметром *E*.

Нехай вихідна напруга утворюється алгебраїчною сумою падінь напруг на резисторах, що утворюють шлях міх вихідними затискачами, причому кожен зі струмів, що викликає падіння напруги, може бути виражений за формулою (5.1):

$$U_{ВИХ} = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} EG_{ПЕРi} R_i = E\sum_{i=1}^{n} G_{ПЕРi} R_i.$$

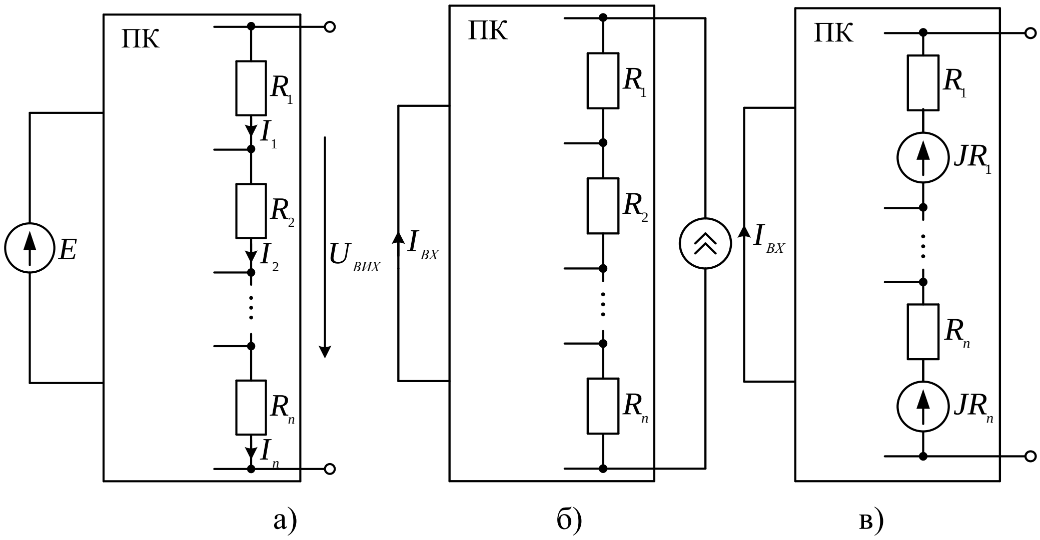


Рис. 5.7

Коефіцієнт передачі за напругою від вхідних до вихідних затискачів

$$K_U = U_{ВИХ} / E = \sum_{i=1}^{n} G_{ПЕРi} R_i .$$

Увімкнемо до вихідних затискачів пасивного кола (рис. 5.7 б) ідеальне джерело струму з параметром J так, щоб зберігалась полярність вихідної напруги. Еквівалентно перетворимо досліджувану схему, ввімкнувши послідовно з кожним резистором джерело напруги з параметром JR_i (рис. 5.7 в). Відповідно до принципу взаємності для струмів, викликаних джерелами напруг, якщо вхідне джерело напруги з параметром E викликає струм $I_i = EG_{ПЕРi}$ в резисторі R_i, то джерело напруги з таким самим параметром, встановлене послідовно з резистором R_i, викличе такий самий вхідний струм. В схемі на (рис. 5.7 в) замість джерела напруги з параметром E послідовно з кожним резистором R_i ввімкнене джерело протилежної полярності з параметром JR_i. За методом накладання вхідний струм створюється частковими струмами усіх залежних джерел напруги:

$$I_{ВХ} = -\sum_{i=1}^{n} JR_i G_{ПЕРi} = -J \sum_{i=1}^{n} R_i G_{ПЕРi} .$$

Коефіцієнт передачі за струмом від вихідних до вхідних затискачів визначається виразом

$$K_I = I_{ВХ} / J = -\sum_{i=1}^{n} R_i G_{ПЕРi} = -K_U .$$

Таким чином, *коефіцієнт передачі за напругою від входу до виходу пасивного кола дорівнює протилежному значенню коефіцієнт передачі за струмом в зворотному напрямі.*

Приклад 5.7. *Проілюструвати принцип взаємності для коефіцієнтів передачі за струмом та напругою для електричного кола на рис. 5.8 а.*

Вихідна напруга кола на рис. 5.8 а утворена алгебраїчною сумою падінь напруг на резисторах R_2, R_4, кожна з яких може бути знайдена за формулою дільника напруги вхідного джерела:

$$U_{ВИХ} = I_4 R_4 - I_2 R_2 = \frac{ER_4}{R_3 + R_4} - \frac{ER_2}{R_1 + R_2}.$$

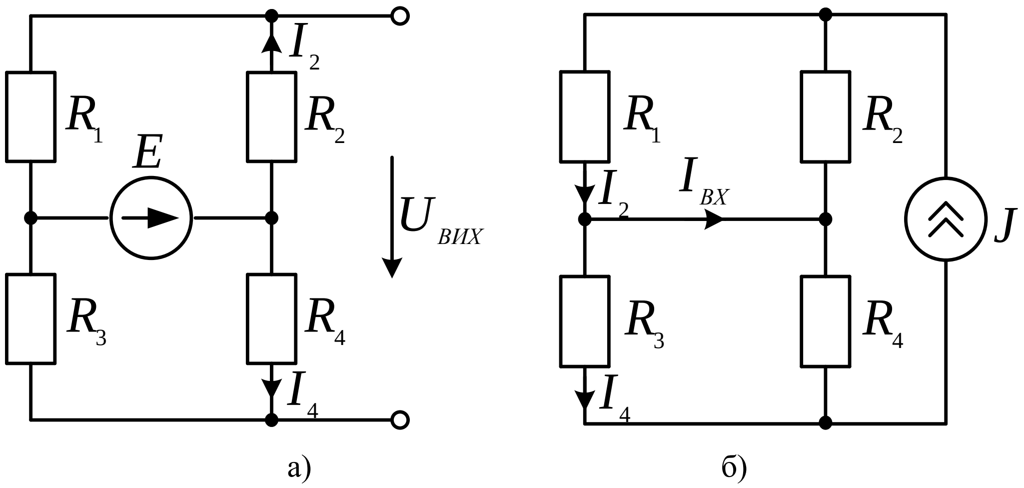


Рис. 5.8

Коефіцієнт передачі за напругою від вхідних до вихідних затискачів

$$K_U = \frac{U_{ВИХ}}{E} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Увімкнемо до вихідних затискачів пасивного кола ідеальне джерело струму з параметром J так, щоб зберігалась полярність вихідної напруги (рис. 2.40 б). Вхідний струм визначаємо за першим законом Кірхгофа, а кожен зі складників – за правилом чужого опору:

$$I_{ВХ} = I_1 - I_3 = \frac{JR_2}{R_1 + R_2} - \frac{JR_4}{R_3 + R_4}.$$

Коефіцієнт передачі за струмом від вихідних до вхідних затискачів

$$K_I = \frac{I_{ВХ}}{J} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} = -K_U$$

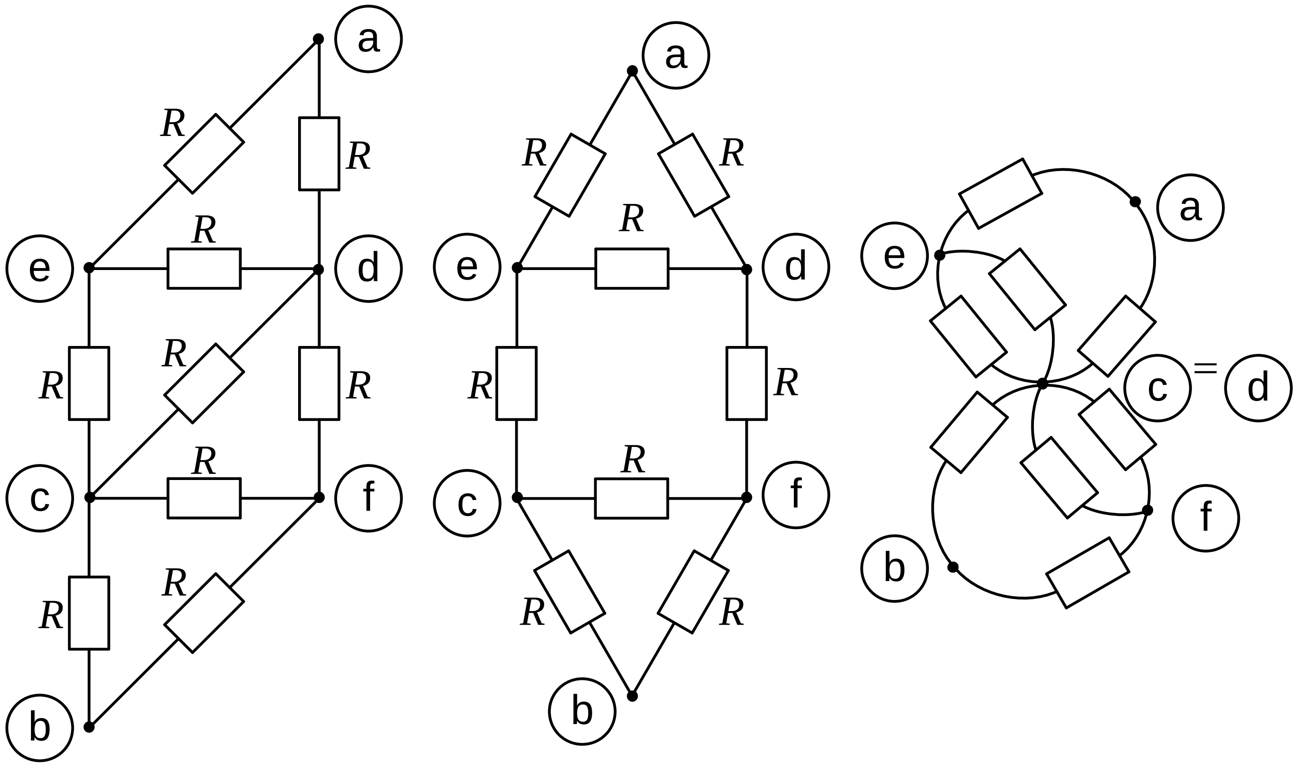
дійсно дорівнює протилежному значенню коефіцієнт передачі за напругою від вхідних до вихідних затискачів.

5.4. Принцип симетрії

Принцип симетрії встановлює зв'язки між потенціалами вузлів та/або струмами віток, виходячи з топологічної симетрії структури електричного кола, що полегшує аналіз такого кола.

Схема електричного кола називається *симетричною*, якщо в ній можна виділити принаймні одну вісь симетрії. У схемах з парною симетрією вісь симетрії доцільно провести через заземлену точку кола, тоді точки або вузли схеми, однаково розташовані відносно осі симетрії, матимуть однакові потенціалами (є еквіпотенціальними). Струми віток, що з'єднані з такими вузлами, дорівнюють нулю, тому ці вітки можна розімкнути, не порушуючи при цьому розподілу струмів та напруг в іншій частині кола. Окрім того, еквіпотенціальні точки або вузли можна об'єднати, що дозволяє суттєво спростити схему та полегшити розрахунки. Зазначені еквівалентні перетворення можна виконувати і при пошуку еквівалентних опорів схем або їх ділянок. Особливо ефективним є врахування симетрії схеми, що утворюється зміною топології первісно несиметричній схемі в результаті дослідів розриву та замикання, що є складниками застосовуваного методу розрахунку.

Приклад 5.8. (*задача академіка А. Д. Сахарова*). *Знайти еквівалентний опір резистивного кола на рис. 5.9 а відносно затискачів a,b, якщо опори усіх резисторів однакові.*



а) б) в)

Рис. 5.9

Аналіз заданої схеми показує, що відносно заданих затискачів a, b вона не симетрична, але псує симетрію лише один резистор, увімкнутий між затискачами c, d. При його видаленні схема стає симетричною з декількома осями симетрії (на рис. 5.9 б пунктиром показана дві з них), так само як і при замиканні затискачів c, d (рис. 5.9 в) в утвореній схемі можна провести вісь симетрії.

Тому для знаходження еквівалентного (вхідного) опору застосовуємо формулу (4.28) з залежністю від опору резистора, увімкнутого між затискачами c, d:

$$R_{BX}(R) = \frac{R_{cd}^{ЕКВ} R_{BX}^{З} + R R_{BX}^{P}}{R_{cd}^{ЕКВ} + R}.$$

Знаходимо значення вхідного опору в режимі розриву R_{BX}^{P} зі схеми на рис. 5.9 б. Пари затискачів e, d і c, f однаково розташовані відносно вертикальної осі та є еквіпотенціальними, тому можна видалити включені між ними резистори. Тоді між затискачами a, b залишаються ввімкнутими дві однакові паралельні вітки, в кожній з яких послідовно з'єднані по три резистори однакових номіналів, тому

$$R_{BX}^{P} = 3R/2 = 1.5R.$$

Вісь симетрії на рис. в поділяє схему на дві симетричні частини, отже, значення вхідного опору в режимі замикання можна знайти, подвоївши еквівалентний опір кожної з них. В структурі кожної такої частини проглядається дві паралельні вітки з еквівалентними опорами $R+R/2$ та R, тому

$$R_{BX}^{з} = 2\frac{(R+R/2)R}{R+R/2+R} = \frac{6}{5}R = 1.2R.$$

Для знаходження еквівалентного опору кола відносно затискачів *c*, *d* використовуємо вісь симетрії, проведену них на рис. 5.9 б. Вона розділяє схему на дві симетричні частини, приєднаних паралельно до зазначених затискачів. В структурі кожної такої частини можна простежити послідовне з’єднання резистора R та двополюсника з еквівалентним опором $2R\times R/(2R+R) = 2R/3$. Отже,

$$R_{cd}^{ЕКВ} = \frac{R+2R/3}{2} = \frac{5R}{6}.$$

Підставивши отримані значення в формулу вхідного опору, отримаємо результат:

$$R_{BX} = \frac{\frac{5R}{6}\times\frac{6R}{5}+R\times\frac{3R}{2}}{\frac{5R}{6}+R} = \frac{6+3\times 3}{5+6}R = \frac{15}{11}R = 1\frac{4}{11}R.$$

У схемах з непарною симетрією вісь симетрії також доцільно провести через заземлену точку кола, тоді точки або вузли схеми, однаково розташовані відносно осі симетрії, мають протилежні значення потенціалів, що викликано протилежними полярностями однаково розташованих джерел (рис. 5.10 *а*).

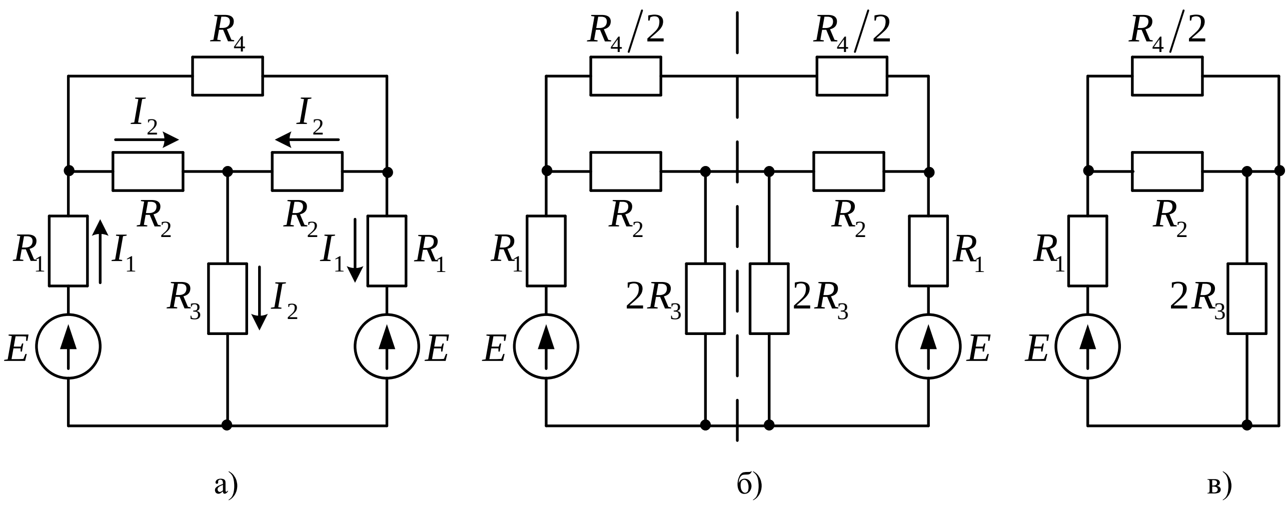


Рис. 5.10

Струми симетричних віток (наприклад I_1 та I_2), а також напруги між парами точок, що симетрично розташовані відносно осі (рис. 5.10 *б*), будуть рівними за величиною, але протилежними за знаком. Тоді усі точки схеми потенціали, які лежать на осі симетрії, матимуть нульовий потенціал та можуть бути з’єднані накоротко (рис. 5.10 *в*).

В загальному випадку внаслідок використання властивостей парної чи непарної симетрії парна кількість незалежних вузлів первісної схеми зменшується вдвічі.

Приклад 5.9. (*модифікована задача олімпіади з ТЕК-2015, присвячена пам’яті В.П. Сігорського*). ***Визначити струми усіх віток електричного кола на рис. 5.11 та перевірити вірність розрахунку балансом потужності.***

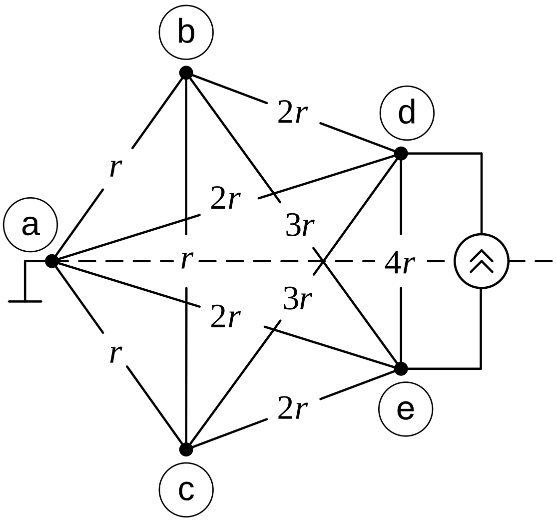


Рис. 5.11

Досліджувана схема має властивість непарної симетрії відносно горизонтальної осі, проведеної через заземлений вузол *a*. Внаслідок цього $\varphi_b = -\varphi_c = \varphi_1; \varphi_d = -\varphi_e = \varphi_2$, і система рівнянь електричної рівноваги містить лише два рівняння відносно зазначених потенціалів. Складемо цю систему за методом вузлових потенціалів, записавши рівняння за першим законом Кірхгофа для струмів вузлів *b* та *d*, попередньо спрямувавши їх на рис. 5.11:

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi_d - \varphi_b}{2r} = \dfrac{\varphi_b - \varphi_e}{3r} + \dfrac{\varphi_b - \varphi_c}{r} + \dfrac{\varphi_b - \varphi_a}{r}; \\ J = \dfrac{\varphi_d - \varphi_e}{4r} + \dfrac{\varphi_d - \varphi_c}{3r} + \dfrac{\varphi_d - \varphi_a}{2r} + \dfrac{\varphi_d - \varphi_b}{2r}. \end{cases}$$

Після підстановки значень потенціалів вузлів та алгебраїчних перетворень матимемо відносно них систему рівнянь

$$\begin{Vmatrix} 23 & -1 \\ -1 & 11 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 6Jr \end{Vmatrix}$$

з розв’язком

$$\varphi_1 = \frac{6Jr}{11\times 23-1} = \frac{6Jr}{252} = \frac{Jr}{42}; \varphi_2 = \frac{23Jr}{42}.$$

Знаходимо значення струмів, напрямлених на рис. 2.5.10:

$$I_{de} = \frac{2\varphi_2}{4r} = \frac{23J}{84};$$

$$I_{dc} = I_{be} = \frac{\varphi_2+\varphi_1}{3r} = \frac{24J}{3\times 42} = \frac{4J}{21};$$

$$I_{da} = \frac{\varphi_2}{2r} = \frac{23J}{84};$$

$$I_{db} = \frac{\varphi_2-\varphi_1}{2r} = \frac{22J}{2\times 42} = \frac{11J}{42};$$

$$I_{bc} = \frac{2\varphi_1}{r} = \frac{J}{21};$$

$$I_{ba} = \frac{\varphi_1}{r} = \frac{J}{42}.$$

Для зведення балансу потужностей знаходимо потужність єдиного джерела

$$P_{ДЖ} = (\varphi_d - \varphi_e)J = 2J\varphi_2 = 2J\times\frac{23Jr}{42} = \frac{23J^2r}{21}$$

та потужність споживачів

$$P_{СП} = I_{de}^2\times 4r + 2I_{dc}^2\times 3r + 2I_{da}^2\times 2r + 2I_{db}^2\times 2r + I_{bc}^2 r + 2I_{ba}^2 r =$$

$$= J^2 r\left(4\times\frac{23^2}{84^2} + 6\times\frac{4^2}{21^2} + 4\times\frac{23^2}{84^2} + 4\times\frac{11^2}{42^2} + \frac{1}{21^2} + 2\times\frac{1}{42^2}\right) =$$

$$= J^2 r\,\frac{2\times 23^2 + 24\times 4^2 + 4\times 11^2 + 4 + 2}{42^2} = \frac{1932J^2r}{42^2} = \frac{23J^2r}{21}.$$

Баланс зійшовся, розрахунок вірний.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ ТА ЗАВДАННЯ

1. Як записати закон Ома для віток, що включають та не включають джерело ЕРС?
2. Як записати аналітично та сформулювати перший та другий закони Кірхгофа?
3. Як визначити еквівалентний опір при послідовному та паралельному з’єднанні резисторів?
4. Сформулюйте правило чужого опору. У яких випадках воно застосовується?
5. Як визначити провідність для різних схем з’єднань резисторів? Назвіть одиниці вимірювання провідності.
6. Як складається баланс потужностей для різних електричних кіл?
7. Пояснити сутність методу контурних струмів.
8. В яких випадках використовується метод контурних струмів?
9. Як скласти розрахункову систему алгебраїчних рівнянь для контурних струмів?
10. Як знайти розв'язок системи рівнянь для контурних струмів в матричному вигляді.
11. Як визначити струми в вітках за відомими контурними струмами?
12. Пояснити суть методу вузлових потенціалів.
13. В яких випадках використовується метод вузлових потенціалів?
14. Як скласти розрахункову систему алгебраїчних рівнянь?
15. Як визначити струми в вітках за відомими потенціалами вузлів?
16. Як знайти розв'язок системи рівнянь згідно методу вузлових потенціалів в матричному вигляді.
17. В яких випадках застосовують метод двох вузлів і в чому його сутність?
18. Що таке сумарне алгебраїчне доповнення та як його обчислити?
19. Назвіть схемні функції пасивного електричного кола
20. В яких випадках застосовується метод еквівалентного генератора?

21. Пояснити алгоритм розрахунку за методом еквівалентного генератора.

22. Що таке пасивний та активний двополюсник?

23. Що таке напруга розриву, струм замикання та вхідний опір активного двополюсника та як їх розрахувати?

24. Як залежить струм даної вітки від опору іншої вітки?

25. Сформулюйте принцип суперпозиції для електричного кола.

26. Пояснити алгоритм розрахунку за методом накладання.

27. В яких випадках застосовується метод пропорційного перерахунку та в чому його сутність?

28. В чому практична цінність принципу дуальності.

29. Як використовують принцип симетрії в розрахунку електричних кіл?

30. Назвіть різновиди принципу взаємності та сформулюйте їх.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебн. для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. / Л. А. Бессонов. – 9 – е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая шк., 1996. – 638 с. Библиогр.: с. 632. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 10 000 экз. – ISBN 5-06-002160-2.

2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебник. / Л. А. Бессонов. – 11 - е изд., перераб. и доп. – М.: «Гардарики» 2007. – 701 с. Библиогр.: с. 695. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 5 000 экз. – ISBN 5-8297 - 0046 - 8.

3. Нейман Л.В., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т. учеб. для вузов. Том 1. - 3-е изд., перераб. и доп. / Л. В. Нейман, К. С. Демирчян. - Л.: Энергоиздат, Ленингр. Отд-ние, 1981. – 536 с. – На пер. Теоретические основы электротехники. – 60 000 экз.

4. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П.А. Ионкин., А. В. Нетушил и др. – Изд. 5-е, перераб. и доп. - М.: Энергоатомиздат, 1989. – 527 с. – Библиогр.: с. 513. – На пер. Основы теории цепей. 50 000 экз.

5. Попов В.П. Основы теории цепей / В. П. Попов. - М.: Высшая школа, 1985. - 496 с. – Библиогр.: с. 483. – На пер. Основы теории цепей. – 20 000 экз.

6. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейних електрических цепей. – Л.: Энергоатомиздат. 1990.-

7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. П. А. Ионкина, - М.: Энергоиздат, 1982. – 767 с. – Библиогр.: с. 762. – На пер. Сборник задач и упражнений по ТОЭ. – 50 000 экз.

8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / Под ред. Л. А. Бессонова, - М.: Высш. шк., 1980. - 472 с. – Библиогр.: с. 468. – На пер. Сборник задач по ТОЭ. – 67 000 экз.

9. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цкпкй: учеб. пособ. для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова.- Изд. 4-е, перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1990. - 544 с. – Библиогр.: с. 540. – На пер. Задачник по теории линейных электрических цепей. – 46 000 экз. – ISBN 5-06-000678-6.

ДОДАТОК

МАТЕМАТИКА

М1. Елементи матричного числення

Основні визначення. Упорядкована сукупність комплексних чи дійсних чисел, що утворюють прямокутну таблицю з m рядків і n стовпців

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \qquad (1.1)$$

називається прямокутною матрицею розмірності $m \times n$. Числа a_{ij} називаються елементами матриці; перший індекс вказує на номер рядка, а другий − на номер стовпця, на перетині яких розміщується цей елемент у таблиці.

Таблиця, складена з $r < m$ рядків і $s < n$ стовпців матриці (1.1), називається *субматрицею*.

Матриця $\mathbf{A}^T$ з елементами a_{ij}^T називається *транспонованою* по відношенню до $\mathbf{A}$ з елементами a_{ij}, якщо $a_{ij}^T = a_{ji}$. Рядки транспонованої матриці дорівнюють стовпцям вихідної, і навпаки.

Матриця називається квадратною порядку n, якщо $m=n$. При $n=1$ маємо матрицю-стовпець (вектор)

$$\mathbf{h} = \begin{Vmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_m \end{Vmatrix}; \qquad (1.2)$$

при $m=1$ − матрицю-рядок (транспонований вектор)

$$\mathbf{h}^T = \lVert h_1 h_2 \dots h_n \rVert. \qquad (1.3)$$

Дві матриці **A** і **B** вважаються рівними, якщо вони мають однакову розмірність і всі їхні відповідні елементи рівні між собою, тобто $a_{ij}=b_{ij}$. Матриця $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, якщо всі її елементи $a_{ij}=0$.

Квадратна матриця **A** називається *симетричною,* якщо вона збігається з транспонованою матрицею, тобто $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. У такої матриці елементи, симетричні відносно головної діагоналі, рівні між собою, тобто $a_{ij}=a_{ji}$.

Квадратна матриця **A** називається *діагональною,* якщо всі її елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю, тобто $a_{ij}=0$ при $i \neq j$.

Діагональна матриця вигляду

$$\mathbf{E}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

називається *одиничною*. Іноді пишуть $\mathbf{E}_n$, якщо хочуть підкреслити порядок одиничної матриці.

Додавання матриць. Матриці **A** і **B** однакової розмірності $m \times n$ можна додавати. Матриця **C=A+B** тієї ж розмірності, елементи c_{ij} якої визначаються за формулою

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, \tag{1.5}$$

називається *сумою* матриць **A** і **B**. З виразу (1.5) випливає, що додавання матриць підпорядковується тим же законам, що і додавання скалярних величин.

Приклад 1.1. $\begin{Vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 0\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}4 & 4 & 3\\ 3 & 8 & 4\end{Vmatrix}.$

Множення матриць. Якщо кількість стовпців першої матриці **A** розмірності $m \times n$ дорівнює кількості рядків другої матриці **B** розмірності $k \times r$, тобто $n=k$, то їх можна перемножити в зазначеному напрямі.

Матриця **C** розмірності $m \times r$ є їхнім *добутком* і позначається

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}, \tag{1.6}$$

якщо її елементи c_{ij} є сумою добутку елементів *i-го* рядка матриці **A** на відповідні елементи j-го стовпця матриці **B**, тобто

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n=k} a_{ir}b_{rj}\,. \tag{1.7}$$

Приклад 1.2.

$$\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 2 & 3\\ -2 & 0 & -1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1\cdot 2+2\cdot(-2) & 1\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot(-1)\\ 0\cdot 2+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot 2+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-1)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1\\ 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1\cdot 1+2\cdot 2\\ 0\cdot 1-1\cdot 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}5\\ -2\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}1\\ 0\\ 2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1\cdot 1 & 1\cdot 0\\ 0\cdot 1 & 0\cdot 0\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 0\end{Vmatrix}.$$

Матрицю розмірності $m \times n$ можна помножити справа на матрицю-стовпець $n \times 1$ і зліва на матрицю-рядок $1 \times m$; при цьому утворюються матриця-стовпець і матриця-рядок з розмірностями $m \times 1$ і $1 \times n$ відповідно. Матриці з розмірностями $m \times n$ і $n \times m$, зокрема, квадратні матриці однакового порядку можна перемножити в будь-якому напрямі.

Множення матриць задовольняє асоціативному і дистрибутивному законам, тобто

$$\begin{gathered}(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{ABC};\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC},\end{gathered} \tag{1.8}$$

але комутативний закон в загальному випадку не має місця, тобто

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}\,. \tag{1.9}$$

Приклад 1.3. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \neq \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$

Справді, у лівій частині маємо матрицю $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, *в правій − іншу матрицю* $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Дві матриці **A** та **B** називаються *переставними*, якщо

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}.$$

При множенні матриці на скалярну величину всі її елементи множаться на цю величину. Діагональні матриці одного порядку є переставними.

Транспонування добутку матриць підкоряється такому закону:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

М2. Визначник, мінор та алгебричне доповнення матриці

Нехай задано n натуральних чисел 1, 2, 3,..., n. Міняючи місцями різні елементи цього ряду, можна отримати $n!$ будь-яких комбінацій з n елементів. Кожна комбінація з n різних елементів, взятих у певному порядку, називається *перестановкою* цих елементів.

Приклад 1.4 . *Для трьох чисел* 1, 2, 3 *одержуємо* 3! = 6 *перестановок:* 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Два числа в перестановці утворюють *інверсію*, якщо більше число стоїть попереду меншого. Так, наприклад, в перестановці 1 3 2 одна інверсія, а в перестановці 321 − три інверсії. Якщо перестановка має парну кількість інверсій, то вона називається *парною*; якщо ж кількість інверсій непарна, то перестановка називається *непарною*.

Визначником (*детермінантом*) n-го порядку квадратної матриці розмірністю $n \times n$ називається алгебрична сума всіх можливих добутків її елементів, узятих поодинці і лише по одному з кожного рядка і кожного стовпця, причому знак кожного доданка визначається кількістю інверсій у перестановках, складених з перших і других індексів членів-співмножників; якщо сума кількості інверсій парна, то доданок є додатним, якщо непарна − від'ємним.

Згідно з визначенням визначника

$$det\mathbf{A} = det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1, i_1, \dots, i_n \\ j_1, j_2, \dots j_n}} (-1)^{i+j} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}, \tag{1.10}$$

де i – кількість інверсій в перестановці з перших індексів i_1 , i_2,… i_n , j – кількість інверсій в перестановці з других індексів j_1 , j_2,… j_n .

Приклад 1.5. *Обчислити визначник другого порядку.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0} a_{11}a_{22} + (-1)^{0+1} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад 1.6. *Обчислити визначник третього порядку.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{0+0}a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{0+2}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{2+0}a_{21}a_{32}a_{13} + (-1)^{0+3}a_{13}a_{22}a_{31} +$$

$$+(-1)^{0+1}a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^{2+3}a_{23}a_{32}a_{11} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Розглянемо визначник n-го порядку

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Виберемо довільно в цьому визначнику k рядків і k стовпців ($1 < k < n$). З елементів, що містяться на перетині вибраних рядків і стовпців, можна утворити визначник k-го порядку, який називається *мінором* k-го порядку визначника D та позначається M. Якщо викреслити в заданому визначнику вибрані k рядків і k стовпців, то з решти елементів можна утворити визначник (n–k)-го порядку, який називається *додатковим мінором* визначника D та позначається $\overline{\mathrm{M}}$.

Приклад 1.7. *Обчислити мінор* M *і додатковий мінор* $\overline{\mathrm{M}}$ *для другого і четвертого рядків та першого і третього стовпців визначника четвертого порядку.*

Вибравши у визначнику D *другий і четвертий рядки, перший і третій стовпці, отримаємо*

$$\mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}, \quad \overline{\mathrm{M}} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Нехай a_{ij} – деякий елемент визначника D (очевидно, що мінор першого порядку є елементом визначника). А*лгебричним доповненням* елемента визначника D називається додатковий мінор до елемента a_{ij}, узятий із знаком $(-1)^{i+j}$, де i – номер вибраного рядка, а j – номер стовпця. Алгебричне доповнення позначається A_{ij}, тобто

$$\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{\mathrm{M}}.$$

Приклад 1.8. *Обчислити алгебричне доповнення* A_{21} *визначника третього порядку.*

Використовуючи визначення алгебричного доповнення, маємо

$$\mathrm{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Будь-який визначник можна подати у вигляді суми добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебричні доповнення, тобто

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathrm{A}_{ij}. \qquad (1.11)$$

Обчислення визначників порядку, вищого за третій, виконують послідовним зведенням цього визначника до нижчого порядку, розкладаючи його за елементами якого-небудь рядка або стовпця.

Приклад 1.9. *Обчислити визначник* $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Розкладемо визначник за елементами третього стовпця, оскільки він має два нульові елементи.

$$D = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4(8+4+27-24-12-3)-(2+6+12-18-4-2)=4.$$

Сумарне алгебраїчне доповнення вводять для позначення алгебраїчної суми звичайних алгебраїчних доповнень: $\Delta_{(a+b)(c+d)} = \Delta_{ac} - \Delta_{ad} - \Delta_{bc} + \Delta_{bd}$. Алгоритм прямого розрахунку сумарного алгебраїчне доповнення полягає в наступному:

- в матриці рядок a треба додати до рядка b і далі рядок a викреслити;
- стовпчик c треба додати до стовпчика d, а потім стовпчик c викреслити;
- знайти визначник підматриці, що утворилася;
- помножити визначник на $(-1)^{a+c}$.

*Приклад 1-10.*Знайти сумарне алгебраїчне доповнення $\Delta_{(1+3)(3+2)}$ матриці $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{Vmatrix}.$

$$\xrightarrow{1} \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 4 & 11 & \cancel{6} \\ 8 & 13 & \cancel{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{3} 4\cdot 13 - 8\cdot 11 = -36 \xrightarrow{4} \Delta_{(1+3)(3+2)} = (-1)^{1+3}(-36) = -36$$

М3. Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n = b_2; \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ...a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.12}$$

Розв'язком системи (1.12) називається така сукупність значень невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$, яка при підстановці перетворює зазначені рівняння на тотожності. Якщо система (1.12) має хоча б один розв'язок, то вона називається сумісною. Якщо система (1.12) не має жодного розв'язку, то вона називається несумісною. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має тільки один розв'язок, інакше вона називається *невизначеною*.

Визначник $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

складений з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, називається головним визначником системи.

Якщо головний визначник системи n лінійних рівнянь з n невідомими не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок за *правилом Крамера*:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = \overline{1, n}), \tag{1.13}$$

де $$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

– допоміжний визначник, отриманий з головного визначника Δ системи заміною його k-го стовпця стовпцем вільних членів системи рівнянь (1.12).

Приклад 1.11. *Розв'язати систему трьох рівнянь з трьома невідомими:*

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0;$$
$$2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1;$$
$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 2.$$

Знаходимо визначники

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 25;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 7; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -13;$$

Відповідно до формул (1.13) *маємо розв'язки заданої системи рівнянь:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{25}{4}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{4}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{4}.$$

Якщо головний визначник системи дорівнює нулю, то система є невизначеною або несумісною.